PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 5. | 1. März 1922. Redaktionsschluß für No. 7 am 28. Februar 1922. | 23. Jahrgang.

INHALT:

Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Hamburg: Übernahme von photometrischen Registrierungen durch das Physikalische Institut der Universität Hamburg. S. 105.

Originalmitteilungen:

Shizuwo Sano, Über die Diffusion in einem elektrischen Felde. S. 107.

R. Gans, Über den Abstand der Molekeln. S. 108.

F. Kirchner, Bemerkung zu Gerlach „Kristallgitteruntersuchungen mit Röntgenstrahlen". S. 114.

W. Gerlach, Das $K\alpha$-Dublett, nebst einer Neubestimmung der Gitterkonstanten einiger Kristalle. S. 114.

A. Kopff, Über eine Möglichkeit der Prüfung des speziellen Relativitätsprinzips auf astronomischem Wege. S. 120.

O. Meißner, Seiches der Ostsee. S. 121.

F. Kock u. G. Schweikert, Anwendung der Kapazitätsmessung durch Schwebungen zur Bestimmung kleiner Strahlungs- und Stromänderungen. S. 123.

M. Born, Über die Temperaturabhängigkeit der Pyroelektrizität. S. 125.

Besprechungen:

H. G. Bader, Grundlagen der Flugtechnik. S. 128.

Berichtigungen. S. 128.

Personalien. S. 128.

Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Hamburg: Übernahme von photometrischen Registrierungen durch das Physikalische Institut der Universität Hamburg.

Die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft hat Mittel zur Verfügung gestellt, um im Physikalischen Institut der Hamburgischen Universität mit registrierenden Mikro-Photometern[1]) unentgeltlich für die deutsche Wissenschaft photographisch-photometrische Registrierungen ausführen zu können. Die Ausführung solcher Registrierungen für wissenschaftliche Zwecke ist kostenlos. Für wissenschaftliche Untersuchungen für die Technik wird für jede angefertigte Registrier-Platte ein Preis berechnet, der etwa das Dreifache des jeweiligen Preises der käuflichen Platte ist.

Für die Registrierungen stehen zwei Neukonstruktionen des obengenannten Instruments zur Verfügung, und zwar:

1. Ein großes Präzisions-Registrier-Mikrophotometer[2]) mit den Übersetzungsverhältnissen 1 : 7,786 und 1 : 46,60, welches sich besonders zur Photometrierung schmaler Objekte, z. B. Spektrallinien, Interferenzerscheinungen usw. eignet.

2. Ein photometrisch-registrierender Komparator[3]) mit dem Übersetzungsverhältnis 1 : 1 für diffusere Objekte, z. B. Röntgenspektrogramme, Debye-Scherrer-Ringe, Absorptionsspektren von Farbstoffen usw.

Bei den mit dem erstgenannten Instrument erhaltenen Registrierplatten können die Längenabstände durch Division mit 7,786 bzw. 46,60 auf die Längenabstände der Objekte auf der Originalplatte umgerechnet werden, doch ist dabei zu beachten, daß die Werte 7,786 bzw. 46,60 nur Mittelwerte sind, während streng genommen, infolge der gewählten optischen Anordnung, die Übersetzungsverhältnisse nach dem Rande der Platte zu größer werden. Die Fehler aber, die man begeht, wenn man mit diesen Mittelwerten rechnet, betragen auf die Originalplatte bezogen, für die 7,8 fache Übersetzung im Maximum 2,5 μ, im Durchschnitt 1,1 μ, für die 46 fache Übersetzung im Maximum 0,4 μ, im Durchschnitt 0,2 μ, vorausgesetzt, daß man die äußersten Randzonen der Registrierplatte in Breite von 1 cm außer acht läßt. Sollen Längenmessungen höchster Präzision — der Apparat erlaubt solche auf 0,1 μ genau auszuführen — gemacht werden, so werden in jedem einzelnen Falle genaue Korrektionswerte für das Übersetzungsverhältnis auf Wunsch mitgeteilt.

Was die Wahl dieser beiden Übersetzungsverhältnisse anbetrifft, so ist dafür nicht nur die Art der betreffenden Objekte maßgebend, sondern aus ökonomischen Gründen auch die Länge der auszuphotometrierenden Strecken, da ja bei Benutzung der 46 fachen Übersetzung nur $2^1/_2$ mm der Originalplatte auf der 12 cm langen Registrierplatte zur Abbildung kommen, also z. B. ein Spektrum von 60 mm Länge 24 Registrierplatten erfordert, während mit der 7,8 fachen Übersetzung nur 4 Platten notwendig wären.

Besonders zu betonen ist noch, daß für Registrierungen mit diesem Apparat wegen der Dimensionen des Plattentisches die Größe der einzusendenden Platten in der Registrierrichtung 12 cm nicht überschreiten darf, während in der Querrichtung der Abstand der Objekte von beiden Rändern der Platte nicht größer als 6 cm sein darf. Größere Platten müssen also von den Einsendern vorher entsprechend zerschnitten werden.

Bei dem unter 2. genannten Registrier-

1) P. P. Koch, Ann. d. Phys. **39**, 705, 1912.

2) F. Goos, Zeitschrift f. Instrumentenkunde **41**, 313, 1921.

3) F. Goos, diese Zeitschr. **22**, 648, 1921.

komparator ist das Übersetzungsverhältnis streng konstant, und zwar 1 : 1. Auf dem Schlitten dieses Apparates können Originalplatten bis zu 13 × 18 cm Größe aufgelegt werden, und eine Strecke von 18 cm Länge ohne abzusetzen auf einer Registrierplatte von ebenfalls 18 cm Länge registriert werden.

Allgemein wird gebeten bei Einsendung von Platten folgendes zu beachten:

A) Bezeichnet man mit J die Intensität des auf die Platte einfallenden Lichtes, mit E die Intensität des durch die geschwärzte Stelle durchgegangenen Lichtes, und nennt man den Ausdruck $S = \log J - \log E$ die Schwärzung der betreffenden Stelle, bezeichnet man ferner mit

S_0 die Schleierschwärzung, mit
S_1 die geringste Schwärzung, deren Photometrierung gewünscht wird, mit
S_2 die größte Schwärzung, deren Photometrierung gewünscht wird,

so soll möglichst sein

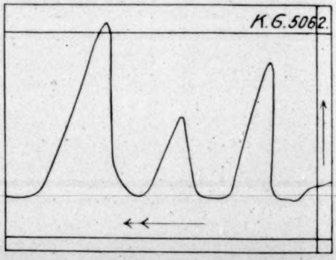
1. $S_2 - S_1$ nicht größer als 1,6,
2. $S_1 - S_0$ nicht kleiner als 0,1,
3. S_0 möglichst klein.

B) Auf den Platten müssen diejenigen Strecken, die ausphotometriert werden sollen, genau durch Marken, etwa Pfeile oder dergleichen gekennzeichnet sein; event. im Objekt anzubringende Orientierungsmarken müssen ebenfalls vom Einsender angebracht sein, so daß sich die hier zu leistende Arbeit lediglich auf das Durchphotometrieren beschränkt.

C) Sollen längere auf ein und derselben Platte befindliche Spektren, die mehrere Registrierplatten erfordern, photometriert werden, so ist anzugeben, ob die einzelnen Registrierplatten streng photometrisch miteinander vergleichbar sein sollen, oder ob jede Registrierplatte für sich unabhängig benutzt werden soll.

Selbstverständlich können Objekte auf verschiedenen Originalplatten nicht ohne weiteres aufeinander bezogen werden. Näheres über die Arbeitsmethoden der photographischen Photometrie findet sich bei J. Hartmann, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **19**, 97, 1899 und bei P. P. Koch, Ann. d. Phys. **30**, 841, 1909. Sollen die auf einer Platte befindlichen Objekte aus irgendwelchen Gründen teils mit dem Komparator, teils mit dem großen Präzisionsregistrierphotometer registriert werden, so müssen entweder besondere Intensitätsmarken vorhanden sein, oder aber in den Objekten selbst bestimmte Stellen angegeben werden, die, als Intensitätsmarken dienend, sowohl beim Registrieren mit dem einen wie mit dem anderen Instrument mit registriert werden und den photometrischen Anschluß vermitteln.

D) Die Registrierplatten, welche von hier zur Ablieferung gelangen, tragen rechts am oberen Plattenrande (Schicht nach vorne), bei Photometrierung mit dem großen Präzisionsphotometer die Bezeichnung KG mit angefügter Nummer, bei Photometrierung mit dem Komparator die Bezeichnung C mit angefügter Nummer; außerdem noch einige Zeichen, deren Bedeutung die beigefügte Skizze erläutert.



Der Pfeil ↑ zeigt wachsende Schwärzung an, der Pfeil ←← zeigt die Registrierrichtung an. Die zwei horizontalen hellen Linien oben und unten sind Nullmarken für die photometrischen Werte, die vertikale helle Linie am rechten Plattenrande ist Nullmarke für Längenmessungen.

E) Die Erledigung der Registrierarbeiten erfolgt schnellstens in Reihenfolge der Eingänge. Doch behält sich das Institut vor, bei sehr umfangreichen Einsendungen ev. eine Zwischenschaltung kleinerer Arbeiten eintreten zu lassen.

Berlin und Hamburg, im Dezember 1921.
Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft E. V.
Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 23. Dezember 1921.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Diffusion in einem elektrischen Felde.

Von Shizuwo Sano.

Diese kurze Anmerkung ist eine Beilage zu meiner Schrift[1]): „Über die elektrische Kraft an irgendeinem Punkte in einer Flüssigkeit, in welcher ein Diffusionsprozeß vor sich geht".

Der Einfachheit halber nehme ich an, daß der Effekt der magnetischen Kraft ganz unbedeutend ist.

Nennen wir θ die absolute Temperatur, F die freie Energie in der Volumeneinheit, Ψ_g das Gravitationspotential und X die x-Komponente der elektrischen Kraft, alles im Punkte (x, y, z) gemessen, ϱ_i und ξ_i Dichte bzw. x-Komponente der Geschwindigkeit des $i$ten chemischen Bestandteiles, q_i die von den Masseneinheiten des Bestandteiles getragene Elektrizitätsmenge und n die totale Zahl der chemischen Bestandteile der in Betracht kommenden elektrolytischen Lösung. Weiter setzen wir $\mathfrak{X}_i$ für den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho_i} + \Psi_g\right) - q_i X,$$

wo F als eine Funktion der $\theta, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ und der elektrischen Verschiebung anzusehen ist.

Unter Vernachlässigung der höheren Potenzen der $\mathfrak{X}$ und der Raumvariationen von θ, erhielt ich in der obengenannten Arbeit die Gleichung:

$$-(\xi_i - \xi_1) = a_{1i}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \sum_{j=1}^{j=n} b_{1i}^{(j)} \mathfrak{X}_j, \qquad (1)$$

wo a und b skalare Größen sind.

Der Hauptzweck dieser Schrift ist, einige Eigenschaften der Koeffizienten b zu diskutieren.

Das chemische Potential $\partial F/\partial \varrho_i$ ist nur bis auf eine Funktion der Form $A\theta + B$ bestimmt, wo A und B beliebige Konstanten bedeuten, so daß (1) nur möglich ist, wenn

$$\sum_{j=1}^{j=n} b_{1i}^{(j)} = 0. \qquad (2)$$

Aus demselben Grunde scheint es mir, daß die Bancroftsche Gleichung[2])

$$\xi_i = \pm U\left(X - \frac{1}{q_i}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F_0}{\partial \varrho_i}\right)$$

nicht gelten kann. In derselben bedeutet F_0 den Wert von F, wenn die elektrische Verschiebung verschwindet, und U die Beweglichkeit; das obere oder untere Zeichen wird gewählt, je nachdem der $i$te Bestandteil ein Kation oder Anion ist.

Weiter erhebt sich die Frage, ob man anzunehmen hat, daß die relative Geschwindigkeit irgendeines Bestandteiles i in betreff zu irgendeinem Bestandteile j von $\mathfrak{X}_i$ und $\mathfrak{X}_j$ und nicht von den übrig bleibenden $\mathfrak{X}$ abhängig ist. Auf Grund der Voraussetzung, daß die relative Geschwindigkeit von

$$\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots \mathfrak{X}_{i-1}, \mathfrak{X}_{i+1}, \ldots \mathfrak{X}_{j-1}, \mathfrak{X}_{j+1}, \ldots \mathfrak{X}_n$$

unabhängig ist, erhält man vermöge (2), aus (1):

$$\xi_i - \xi_j = a_{ij}\frac{\partial \theta}{\partial x} + b_{ij}^{(j)}(\mathfrak{X}_j - \mathfrak{X}_i). \qquad (3)$$

In ähnlicher Weise folgt:

$$\xi_j - \xi_k = a_{jk}\frac{\partial \theta}{\partial x} + b_{jk}^{(k)}(\mathfrak{X}_k - \mathfrak{X}_j), \qquad (4)$$

$$\xi_k - \xi_i = a_{ki}\frac{\partial \theta}{\partial x} + b_{ki}^{(i)}(\mathfrak{X}_i - \mathfrak{X}_k). \qquad (5)$$

Damit die drei Gleichungen (3), (4), (5) gleichzeitig gelten, müssen wir

$$b_{ij}^{(j)} = b_{jk}^{(k)} = b_{ki}^{(i)} \qquad (6)$$

haben.

Bezeichnen wir nunmehr jedes Glied in (6) mit b, und nennen die Dichte der Flüssigkeit ϱ, welche wir als gleichförmig betrachten, indem wir den Einfluß der Gravitation vernachlässigen. Bemerken wir schließlich, daß

$$b_{ij}^{(j)} = b_{ji}^{(i)}$$

für alle Werte von i und j, dann ergibt sich aus (3)

$$\xi_i - \frac{1}{\varrho}\sum_{j=1}^{j=n} \varrho_j \xi_j = b X q_i, \qquad (7)$$

weil die Volumendichte der Elektrizität in elektrolytischen Lösungen gewöhnlich außerordentlich klein ist. Aus der Gleichung (7) folgt nun unmittelbar, daß die totale Masse der Kationen, die aus der gleichförmigen Portion der Lösung während eines bestimmten Zeitraums transportiert wird, der totalen Masse der Anionen die aus derselben Gegend während derselben Zeit transportiert wird, gleich ist. Da aber sich dieses nicht bewährt, müssen wir annehmen, daß $b_{ij}^{(k)}$ nicht null ist, wenn sich k von i und j unterscheidet.

Betrachten wir jetzt das Glied $b_{1i}^{(j)}\mathfrak{X}_j$, wo j weder 1 noch i ist. Im Verhältnis, wie ϱ_j sich unendlich vermindert, wird die linke Seite von (1) unabhängig von ϱ_j, aber es folgt nicht, daß

1) Diese Zeitschr. **7**, 318, 1906; Proc. Math.-Phys. Soc. Tokyo **2**, 465, 1906.

2) Wilder D. Bancroft, Journ. Phys. Chem. **7**, 416, 1903.

$\mathfrak{X}$ sich unbeschränkt verkleinert. Deshalb müssen wir annehmen, daß $b_{1j}^{(j)}$ mit ϱ_j zugleich verschwindet. Es ist wahrscheinlich, daß wenn ϱ_j klein ist, $b_{1k}^{(j)}$ merklich ϱ_j proportional ist.

Es sei hervorgehoben, daß die Gleichung (1) die Behauptung enthält, daß das Maß der Diffusion eines chemischen Bestandteiles nicht nur von der Raumvariation seiner Dichte, sondern auch von den Raumvariationen der Dichten der anderen Bestandteile abhängig ist, und daß der Unterschied des elektrischen Potentials zwischen zwei Punkten in der elektrolytischen Lösung nicht nur von dem Unterschiede der Dichten der elektrolytischen Ionen in den zwei Punkten, sondern auch von dem Unterschiede der Dichten der Nicht-Elektrolyte abhängig ist. Dieser Theorie gemäß folgt auch, daß in einer homogenen elektrolytischen Lösung neutrale Bestandteile durch die elektrischen Ströme in die eine oder andere Richtung mitgeführt werden.

(Eingegangen 8. November 1921.)

Über den Abstand der Molekeln.

Von Richard Gans.

Viele Probleme der modernen Molekularphysik lassen die Kenntnis des Abstandes der Molekeln wünschenswert erscheinen. In den Lehrbüchern findet sich gewöhnlich der Wert

$$R = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

angegeben, unter n die in der Volumeinheit befindliche Teilchenzahl verstanden. Der Ableitung dieser Formel liegt die Annahme zugrunde, man dürfe die wirkliche Verteilung durch eine Anordnung in den Punkten eines kubischen Raumgitters ersetzen.

Einen wesentlichen Fortschritt demgegenüber stellt eine Untersuchung von P. Hertz[1]) dar, der für den mittleren Abstand nach strengen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$R = \frac{0{,}5540}{\sqrt[3]{n}}$$

fand. Er setzt dabei voraus, daß die Molekeln durch Punkte ersetzt werden können, sieht also von der Ausdehnung der Teilchen ab. Bei Gasen geringer Dichte ist das unbedenklich, jedoch läßt sich das Resultat nicht mehr auf Flüssigkeiten anwenden, bei denen der mittlere Teilchenabstand mit dem Molekulardurchmesser vergleichbar ist.

Aus diesem Grunde wollen wir den Wert für den mittleren Abstand der Molekeln unter der Annahme, daß diese Kugeln vom Durchmesser s seien, bestimmen. Da aber der von Hertz behandelte Fall etwas einfacher ist und in wenigen Worten erledigt werden kann, so soll er an die Spitze unserer Überlegungen gestellt werden.

§ 2. Der mittlere Abstand einer Punktverteilung.

Es mögen sich in der Volumeinheit n Punkte befinden. Der Mittelwert des Abstandes jeden Punktes von dem ihm zunächst liegenden heiße der mittlere Abstand R. Diesen wollen wir berechnen.

Es sei $w(r)\,dr$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Punkt von seinem Nachbarpunkte, d. h. von dem ihm zunächstliegenden, den Abstand r habe. Dann ist $\int_0^r w(r)\,dr$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er von seinem Nachbarpunkte irgendeinen Abstand zwischen 0 und r habe, und $1 - \int_0^r w(r)\,dr$ die Wahrscheinlichkeit, daß zwischen 0 und r kein Punkt liegt.

Da ferner $4\pi n r^2 dr$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß wenigstens ein Punkt zwischen r und $r + dr$ liegt, so ist

$$\left[1 - \int_0^r w(r)\,dr\right] 4\pi n r^2 dr$$

die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Punkt der Nachbarpunkt des betrachteten ist. Es muß also gelten

$$\left[1 - \int_0^r w(r)\,dr\right] 4\pi n r^2 dr = w(r)\,dr. \tag{1}$$

Dividieren wir durch $4\pi n r^2 dr$ und differentiieren dann nach r, so folgt

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{w}{4\pi n r^2}\right) = -w. \tag{2}$$

Die Integration ergibt

$$w(r) = A \cdot 4\pi n r^2 e^{-\frac{4\pi n r^3}{3}}. \tag{3}$$

Da nach (1) für sehr kleine Werte von r gelten muß $w(r) = 4\pi n r^2$, so folgt für die Konstante $A = 1$, also

$$w(r) = 4\pi n r^2 e^{-\frac{4\pi n r^3}{3}}, \tag{4}$$

und der mittlere Abstand wird, wenn wir die neue Variable

$$x = \frac{4\pi n r^3}{3}$$

einführen und dann partiell integrieren,

$$R = \int_0^\infty r w(r)\,dr = \int_0^\infty r e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dr. \tag{5}$$

1) P. Hertz, Math. Ann. 67, 387, 1909.

Da aber

$$dr = \left(\frac{3}{4\pi n}\right)^{1/3} \frac{x^{-2/3}}{3}\, dx$$

ist,

$$R = \left(\frac{3}{4\pi n}\right)^{1/3} \frac{1}{3}\int_0^\infty x^{-2/3} e^{-x}\, dx = \\ = \frac{\Pi\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{0{,}5539}{\sqrt[3]{n}}, \tag{6}$$

d. h. das Hertzsche Resultat.

§ 2. Der mittlere Abstand einer Kugelverteilung.

Haben wir es nicht mit Punkten, sondern mit Kugeln vom Durchmesser s zu tun, und beziehen sich die betrachteten Abstände auf die Mittelpunkte zweier Kugeln, so ist

$$w(r) = 0 \text{ für } r < s. \tag{7}$$

Ferner gilt, ähnlich wie in (1),

$$\left[1 - \int_s^r w(r)\, dr\right] q \cdot 4\pi n r^2 dr = w(r)\, dr, \tag{8}$$

denn der Klammerausdruck links ist — mit Berücksichtigung von (7) — die Wahrscheinlichkeit dafür, daß kein Teilchenmittelpunkt zwischen 0 und r liegt; der Faktor der Klammer aber sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenigstens eine Kugel zwischen r und $r + dr$ liegt. Diese müssen wir zunächst bestimmen.

Zu dem Zwecke denken wir uns N Kugeln nacheinander so in einen Raum vom Volumen V gebracht, daß sie sich nicht durchdringen. Ist, wie wir für den Augenblick voraussetzen wollen, die Raumerfüllung so gering, daß wir von einem Sichschneiden der Deckungssphären absehen können, so steht der ersten Kugel der Raum V, der zweiten $V - \beta$, der dritten $V - 2\beta, \ldots$ der Nten $V - (N-1)\beta$ zur Verfügung, unter

$$\beta = \frac{4\pi}{3} s^3$$

die Größe der Deckungssphäre verstanden. Die Wahrscheinlichkeit dieser Verteilung wird also

$$V(V-\beta)(V-2\beta)\ldots(V-(N-1)\beta) = \\ = V^N\left(1 - \frac{\beta}{V}\right)\left(1 - \frac{2\beta}{V}\right)\ldots\left(1 - \frac{(N-1)\beta}{V}\right)$$

proportional sein, und ist $\frac{N\beta}{V}$ noch sehr klein gegen 1, dagegen N sehr groß gegen 1, so gilt genähert

$$V^N\left(1 - \sum_{\nu=1}^{N-1}\frac{\nu\beta}{V}\right) = V^N\left(1 - \frac{N(N-1)\beta}{2V}\right) = \\ = V^N\left(1 - \frac{N\beta}{2V}\right)^N = V^N e^{-N\cdot\frac{N\beta}{2V}}.$$

Alle diese Ausdrücke sind, da $\frac{N\beta}{V}$ sehr klein ist, einander gleichwertig, und die Bedeutung von

$$e^{-N\cdot\frac{N\beta}{2V}}$$

ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von den N im Raum V liegenden Kugeln sich nirgends zwei durchdringen.

Ist die Raumerfüllung nicht als sehr klein anzusehen, so wird man anstatt $e^{-N\cdot\frac{N\beta}{2V}}$ eine andere Funktion

$$p = e^{-N\varphi\left(\frac{N\beta}{V}\right)} \tag{9}$$

mit derselben Bedeutung einzuführen haben.

Mittels dieser Funktion können wir nun die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, daß von den N-Kugeln, die im Raume V liegen müssen, tatsächlich keine in einem bestimmten Element dv des Raumes V liegt, oder mit anderen Worten, daß alle Kugeln in $V - dv$ liegen. Diese ist

$$\frac{(V-dv)^N e^{-N\varphi\left(\frac{N\beta}{V-dv}\right)}}{V^N e^{-N\varphi\left(\frac{N\beta}{V}\right)}} = \left(1 - \frac{N}{V}dv\right)\left(1 - N\varphi'\left(\frac{N\beta}{V}\right)\cdot\frac{N\beta}{V}dv\right) = \\ = 1 - \frac{N}{V}dv\left[1 + \frac{N\beta}{V}\varphi'\left(\frac{N\beta}{V}\right)\right] = 1 - \frac{N}{V}dv\,\Phi\left(\frac{b}{V}\right), \tag{10}$$

wo also

$$\Phi\left(\frac{b}{V}\right) = 1 + \frac{N\beta}{V}\varphi'\left(\frac{N\beta}{V}\right), \tag{11}$$

unter $b = \frac{N\beta}{2V}$ die vierfache Raumerfüllung verstanden, wie in der van der Waalsschen Theorie.

Da (10) die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß keins der N Teilchen in dv liegt, so ist

$$1 - \left(1 - \frac{N}{V}\Phi\left(\frac{b}{V}\right)dv\right) = \frac{N}{V}\Phi\left(\frac{b}{V}\right)dv$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenigstens eine Kugel in dv liegt, d. h. das, was wir in (8) mit $nq\,dv = q\,4\pi n r^2\, dr$ bezeichnet hatten. Somit lautet die Gleichung (8)

$$\left[1 - \int_s^r w(r)\, dr\right]\frac{N}{V}\Phi\left(\frac{b}{V}\right) 4\pi r^2 = w(r). \tag{12}$$

Eigentlich müßte in (10) und damit auch in (12) N durch $N-1$ und V durch

$$V-v=V-\frac{4\pi}{3}r^3$$

ersetzt werden. Dann müßte man (12) integrieren und schließlich dürfte man zum

$$\lim N=\infty;\ \lim V=\infty;\ \lim\frac{N}{V}=n$$

übergehen. Es zeigt sich aber, daß das zum gleichen Resultat führt, wie wenn man den Grenzübergang vor der Integration ausführt.

Die Integration der Gleichung (12), die natürlich für $s=0$ in (1) übergeht, ergibt

$$w=A\frac{N}{V}\Phi\left(\frac{b}{V}\right)4\pi r^2 e^{-\frac{N}{V}\Phi\left(\frac{b}{V}\right)\frac{4\pi}{3}r^3}, \tag{13}$$

und da für $\lim r=s$ nach (12)

$$w(s)=\frac{N}{V}\Phi\left(\frac{b}{V}\right)4\pi s^2$$

sein soll, so bestimmt sich die Konstante A, und wir erhalten schließlich

$$\left.\begin{array}{c} w(r)=\frac{N}{V}\Phi\left(\frac{b}{V}\right)4\pi r^2 e^{-\frac{N}{V}\Phi\left(\frac{b}{V}\right)\frac{4\pi}{3}(r^3-s^3)} \\ \text{für } r>s, \end{array}\right\} \tag{14}$$

Der mittlere Abstand wird somit

$$R=\int_s^\infty r\,w(r)\,dr,$$

und wenn wir in (14)

$$\frac{N}{V}\Phi\left(\frac{b}{V}\right)\frac{4\pi}{3}r^3=u;\quad \frac{N}{V}\Phi\left(\frac{b}{V}\right)\frac{4\pi}{3}s^3=\gamma \tag{15}$$

setzen, so folgt

$$R=\int_\gamma^\infty r e^{-(u-\gamma)}\,du. \tag{16}$$

Durch partielle Integration ergibt sich

$$R=s+e^\gamma\int_\gamma^\infty e^{-u}\,dr. \tag{17}$$

Da aber nach (15)

$$\left(\frac{r}{s}\right)^3=\frac{u}{\gamma} \tag{18}$$

ist, so erhalten wir schließlich

$$R=s\left\{1+\frac{e^\gamma}{3\gamma^{1/3}}\int_\gamma^\infty u^{-2/3}e^{-u}\,du\right\}=sL(\gamma). \tag{19}$$

(19) drückt uns $\frac{R}{s}$ durch γ aus, da aber

$$\frac{N}{V}\frac{4\pi}{3}s^3=\frac{2b}{V}$$

ist, so ergibt sich aus (15)

$$\gamma=2\frac{b}{V}\Phi\left(\frac{b}{V}\right). \tag{20}$$

Kennen wir also $\Phi\left(\frac{b}{V}\right)$, so ist damit auch $\frac{R}{s}$ als Funktion von $\frac{b}{V}$ dargestellt.

§ 3. Die Bedeutung der Funktion $\Phi\left(\frac{b}{V}\right)$.

Ehe wir weitergehen, müssen wir also $\Phi\left(\frac{b}{V}\right)$ zu bestimmen suchen. Das läßt sich in einfacher Weise dadurch bewerkstelligen, daß wir die Zustandsgleichung des Systems ermitteln, und hierbei können wir einen Weg einschlagen, den Planck[1]) mit Beschränkung auf Glieder erster Ordnung in $\frac{b}{V}$ gegangen ist.

Während für punktförmige Molekeln die Entropie den Wert

$$S=-kV\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} f\log f\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+\text{const}$$

hat, unter ξ, η, ζ die Geschwindigkeitskomponenten und unter f die Verteilungsfunktion im Geschwindigkeitsraum verstanden, muß man bei kugelförmigen Teilchen endlichen Durchmessers (siehe Planck l. c.) rechts $k\log p$ addieren, wo p, wie in (9), die Wahrscheinlichkeit dafür bedeutet, daß die Kugeln sich nicht durchdringen.

Nach (9) wird also

$$S=-kV\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} f\log f\,d\xi\,d\eta\,d\zeta-kN\varphi\left(\frac{N\beta}{V}\right). \tag{21}$$

Analog wie bei Planck ergibt sich somit

$$\left.\begin{array}{l} S=kN\log V+\frac{3}{2}kN\log\left(E+\frac{AN^2}{V}\right)- \\ \qquad -kN\varphi\left(\frac{N\beta}{V}\right). \end{array}\right\} \tag{22}$$

Hier ist E die Gesamtenergie, $-\frac{AN^2}{V}$ die potentielle Energie der aufeinander wirkenden Teilchen.

Da aber nach den Grundlagen der Thermodynamik

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V=\frac{1}{T};\quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E=\frac{p}{T}$$

ist, so folgt

$$\left(p+\frac{AN^2}{V^2}\right)V=kNT\left[1+\frac{N\beta}{V}\varphi'\left(\frac{N\beta}{V}\right)\right]. \tag{23}$$

Ist V das spezifische Volumen, also N die in der Masseneinheit enthaltene Molekelzahl, so

1) M. Planck, Berliner Berichte 1908, S. 633.

daß $kN = \frac{R}{M}$ (M Molekulargewicht), so ergibt sich, wenn wir $AN^2 = a$ setzen und Gleichung (11) berücksichtigen, als verallgemeinerte van der Waalssche Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) V = \frac{RT}{M}\, \Phi\left(\frac{b}{V}\right). \tag{24}$$

Damit ist die Bedeutung von $\Phi\left(\frac{b}{V}\right)$ bestimmt. Aus den theoretischen Untersuchungen Boltzmanns[1]) folgen die ersten Glieder der Funktion Φ

$$\Phi\left(\frac{b}{V}\right) = 1 + \frac{b}{V} + \frac{5}{8}\left(\frac{b}{V}\right)^2 + 0{,}287\left(\frac{b}{V}\right)^3 + \ldots \tag{25}$$

Weiter ist Φ nicht berechnet, doch wird sich zeigen, daß für unser Problem diese Funktion nur mit roher Annäherung für größere Argumente bekannt zu sein braucht.

§ 4. Umformung der Beziehung für den mittleren Abstand. Zahlenwerte.

Wir wollen jetzt die Gleichung (19) in eine für die zahlenmäßige Berechnung bequemere Form bringen. Zunächst haben wir die Gleichung

$$R = s + \frac{1}{3}\frac{s e^\gamma}{\gamma^{1/3}} \int_0^\infty u^{-2/3} e^{-u}\, du - \frac{1}{3}\frac{s e^\gamma}{\gamma^{1/3}} \int_0^\gamma u^{-2/3} e^{-u}\, du,$$

die besonders für kleine γ brauchbar ist. Hieraus folgt

$$R = \frac{s}{\gamma^{1/3}}\left\{\gamma^{1/3} + e^\gamma \Pi\left(\tfrac{1}{3}\right) - \frac{e^\gamma}{3}\int_0^\gamma u^{-2/3} e^{-u}\, du\right\},$$

und da nach (15)

$$\frac{s^3}{\gamma} = \frac{\frac{3}{4\pi}}{n \Phi\left(\frac{b}{V}\right)}$$

ist,

$$R = \frac{\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}}{\sqrt[3]{n}\left[\Phi\left(\frac{b}{V}\right)\right]^{1/3}} \left\{\gamma^{1/3} + e^\gamma \Pi\left(\tfrac{1}{3}\right) - \frac{e^\gamma}{3}\int_0^\gamma u^{-2/3} e^{-u}\, du\right\} = \frac{K(\gamma)}{\sqrt[3]{n}\left[\Phi\left(\frac{b}{V}\right)\right]^{1/3}}. \tag{26}$$

Da aber nach (20) zusammengehörige Werte von γ und $\frac{b}{V}$ gegeben sind, so wird somit

$$R = \frac{G\left(\frac{b}{V}\right)}{\sqrt[3]{n}}. \tag{27}$$

Aus (26) ersieht man, daß für $\frac{b}{V} = 0$, d. h.

$$\Phi\left(\frac{b}{V}\right) = 1;\ \gamma = 0$$

die Formel in die Hertzsche übergeht.

Durch Entwicklung der e-Funktion unter dem Integral und gliedweise Quadratur ergibt sich

$$K(\gamma) = 0{,}6203\,\gamma^{1/3} + 0{,}5539\, e^\gamma\left[1 - \frac{\gamma^{1/3}}{0{,}8929} S(\gamma)\right], \tag{28}$$

wo

$$S(\gamma) = 1 - \frac{\gamma}{1!\,4} + \frac{\gamma^2}{2!\,7} - \frac{\gamma^3}{3!\,10} + \ldots = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} (-1)^\varkappa \frac{\gamma^\varkappa}{\varkappa!\,(3\varkappa+1)}.$$

Tabelle I.

γ	$K(\gamma)$	$L(\gamma)$
0,0	0,5539	∞
0,2	0,6172	1,701
0,4	0,6628	1,450
0,6	0,7009	1,339
0,8	0,7344	1,275
1,0	0,7645	1,232
2,0	0,8865	1,134
3,0	0,9788	1,094

Tabelle I gibt $K(\gamma)$ in seiner Abhängigkeit von γ. Die Kurve I in Fig. 1 stellt $K(\gamma)$ dar, und zwar gelten für den Ordinatenmaßstab die Zahlen zur Rechten.

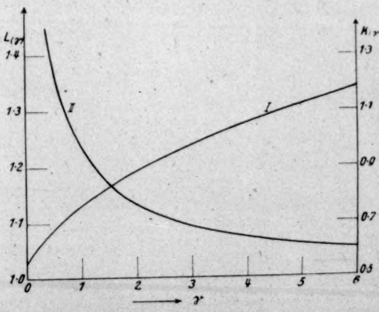


Fig. 1.

1) L. Boltzmann, Gastheorie, Bd. II, siehe auch H. Happel, Ann. d. Phys. (4) 21, 342, 1906.

Eine andere Form der Gleichung (19), die für große Werte von γ besonders geeignet ist, erhält man, wenn man für die von Schlömilch[1]) sogenannte unvollständige Gammafunktion, die von ihm abgeleitete Entwicklung

$$\int_{\gamma}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{\lambda}}\, du = \frac{1}{\gamma^{\lambda}} e^{-\gamma} \left\{ 1 - \frac{a_1}{\gamma + 1} + \right.$$
$$\left. + \frac{a_2}{(\gamma+1)(\gamma+2)} - \dots \right\}$$

einführt, wo $a_1 = \lambda$; $a_2 = \lambda^2$; $a_3 = \lambda^3 + \lambda$; $a_4 = \lambda^4 + 4\lambda^2 - \lambda$; $a_5 = \lambda^5 + 10\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8$ usw.

So ergibt sich

$$R = s\left[1 + \frac{1}{3\gamma}\left(1 - \frac{\frac{2}{3}}{\gamma+1} + \frac{\frac{4}{9}}{(\gamma+1)(\gamma+2)} - \dots\right)\right] = \\ = sL(\gamma). \quad (29)$$

Die dritte Kolonne der Tabelle I enthält $L(\gamma)$, d. h. den Faktor, mit dem man den Molekulardurchmesser multiplizieren muß, um den mittleren Abstand der Teilchenmittelpunkte zu erhalten.

Zwischen $K(\gamma)$ und $L(\gamma)$ besteht die Relation

$$L(\gamma) = \frac{1{,}612}{\gamma^{1/3}} K(\gamma). \quad (30)$$

Für kleine γ wird man $K(\gamma)$ nach (28) berechnen und $L(\gamma)$ mittels (30) bestimmen; für große γ ergibt umgekehrt (29) den Wert von $L(\gamma)$, und aus (30) folgt dann $K(\gamma)$.

Die Kurve II in Fig. 1 stellt $L(\gamma)$ dar, und zwar gelten für den Ordinatenmaßstab die Zahlen zur Linken.

Für sehr kleine γ gibt (26) mit Berücksichtigung von (28), (25) und (20) die Näherung

$$R = \frac{0{,}5539}{\sqrt[3]{n}}\left[1 + \frac{5}{3}\frac{b}{V} - 2{,}115\left(\frac{b}{V}\right)^{4/3}\right] \quad (26')$$

In Tabelle II ist $\Phi\left(\frac{b}{V}\right)$ nach (25), dann γ nach (20), ferner L für die entsprechenden Werte von γ durch Interpolation aus Tabelle I, sowie schließlich G aus den entsprechenden Werten von K (Tabelle I) und Φ (Tabelle II) nach (26) und (27) berechnet. Wir haben somit $\frac{R}{s}$ und $R \cdot \sqrt[3]{n}$ als Funktionen von $\frac{b}{V}$, d. h. der vierfachen Raumerfüllung gefunden.

Für größere Werte von $\frac{b}{V}$ ist $\Phi\left(\frac{b}{V}\right)$ allerdings ungenauer, da Φ ja nur bis zur 3. Potenz bekannt ist. Somit wird auch der Wert von γ

Tabelle II.

$\frac{b}{V}$	$\Phi\left(\frac{b}{V}\right)$	γ	L	G
0,0	1,0000	0,0000	∞	0,5539
0,1	1,1065	0,2213	1,658	0,6016
0,2	1,2273	0,4909	1,396	0,6386
0,3	1,3639	0,8183	1,273	0,6662
0,4	1,5184	1,2147	1,203	9,6929
0,5	1,6921	1,6921	1,153	0,7153
0,6	1,8870	2,2644	1,121	0,7391
0,8	2,347	3,755	1,079	0,7829
1,0	2,912	5,824	1,055	0,8249

nicht ganz sicher sein. Da aber L für größere Werte von γ sich nur wenig ändert, ergibt sich $\frac{R}{s}$ trotz jener Unsicherheit recht genau.

Fig. 2 stellt $\frac{R}{s}$ (Ordinatenmaßstab links) und $R\sqrt[3]{n}$ (Ordinatenmaßstab rechts) als Funktionen von $\frac{b}{V}$ dar.

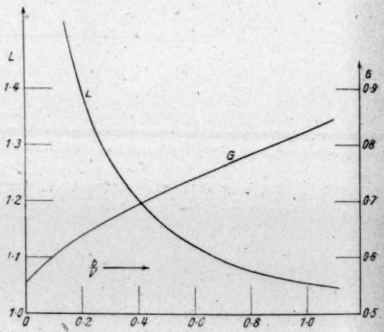


Fig. 2.

Zahlenwerte für $\frac{b}{V}$ ergeben sich erstens mittels der Zustandsgleichung aus dem kritischen Volumen $V_{\varkappa}$ gemäß der Beziehung[1])

$$\frac{b}{V} = 0{,}5620 \frac{V_{\varkappa}}{V}. \quad (31)$$

Happel (l. c. S. 362) gibt die Werte von a und b für Argon, Krypton und Xenon an, die es somit erlauben, für jeden Zustand des Gases den mittleren Abstand der Molekeln zu ermitteln. So ist z. B. im kritischen Punkte $(V = V_{\varkappa})$ $\frac{b}{V} = 0{,}5620$, d. h. nach unserer Kurve $R = 1{,}13\, s$.

1) O. Schlömilch, Kompendium d. höh. Analysis **2**, 265, Braunschweig 1866; siehe auch Zeitschr. f. Math. u. Phys., 4. Jahrg., S. 390.

1) Siehe z. B. H. Happel, Ann. d. Phys. (4) **21**, 361, 1906.

Andrerseits ist $\frac{b}{V}$ seiner Bedeutung als vierfache Raumerfüllung nach

$$\frac{b}{V} = \frac{2\pi}{3} n s^3,$$

und da $n = \frac{N_0 d}{M}$ ($N_0 = 6{,}06 \cdot 10^{23}$ Loschmidtsche Zahl je Mol; d Dichte; M Molekulargewicht), so folgt

$$\frac{b}{V} = \frac{2\pi}{3} \frac{N_0 d s^3}{M}. \qquad (32)$$

Werte von s ergeben sich nach der kinetischen Gastheorie aus dem Reibungskoeffizienten der Gase[1]). So haben wir die Zahlen der folgenden Tabelle für einige Flüssigkeiten mittels (32) und der Kurve für R/s bestimmt. Diesen Werten haften natürlich die Unsicherheiten der Reibungskoeffizienten an.

Tabelle III.

	M	d	$s \cdot 10^8$	$\frac{b}{V}$	$\frac{R}{s}$
Äthyläther . .	74,08	0,720	4,4	1,051	1,05
Äthylalkohol .	46,05	0,804	3,3	0,796	1,08
Benzol	78,05	0,874	3,7	0,720	1,09
Pentan	72,10	0,628	4,1	0,762	1,085

Für Gase ist $\frac{d_0}{M}$ nach dem Avogadroschen Gesetz eine Konstante. Somit folgt für 0^0 und 1 Atm. Druck

Tabelle IV.

	$s \cdot 10^8$	$\frac{b}{V_0}$
N_2	2,8	$1{,}25 \cdot 10^{-3}$
CO	2,9	1,39 „
CO_2	2,9	1,39 „
O_2	2,6	1,00 „
H_2	2,1	0,53 „

Aus diesen Daten läßt sich nach (26′) R für beliebige Drucke und Temperaturen berechnen. ($\frac{b}{V}$ ist dem Druck direkt und der absoluten Temperatur umgekehrt proportional).

Aus Tabelle III sehen wir, daß bei Flüssigkeiten $\frac{R}{s}$ kaum größer als 1 ist. Da R den mittleren Abstand bedeutet, so heißt das: es muß sehr viele sich fast berührende Molekelpaare geben.

Der wahrscheinliche Abstand R_1, d. h. der Abstand, der ebenso häufig über- wie unterschritten wird, berechnet sich aus der Formel

$$\int_s^{R_1} w\,dr = \frac{1}{2}$$

mittels (14) und (15) zu

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{\left(\frac{3}{4\pi}\ln 2\right)^{1/3}}{\sqrt[3]{n}} \left\{ \frac{1}{\Phi\left(\frac{b}{V}\right)} + \frac{2}{\ln 2}\frac{b}{V} \right\}^{1/3} = \\ &= s\left\{1 + \frac{\ln 2}{\gamma}\right\}^{1/3}. \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

So ergibt sich Tabelle V.

Tabelle V.

$\frac{b}{V}$	$\frac{R_1}{s}$	$R_1 \sqrt[3]{n}$	$\frac{R_2}{s}$	$R_2 \sqrt[3]{n}$
0,0	∞	0,5491	∞	0,5420
0,1	1,604	0,5822	1,444	0,5241
0,2	1,342	0,6130	1,108	0,5063
0,3	1,227	0,6419		
0,4	1,162	0,6694		
0,5	1,121	0,6955		
0,6	1,092	0,7206		
0,8	1,058	0,7678		
1,0	1,039	0,8114		

Der häufigste Abstand R_2 ist das Argument, für das $w(r)$ ein Maximum ist. Aus (14) folgt

$$R_2 = \frac{1}{(2\pi\Phi n)^{1/3}} = s\left(\frac{2}{3\gamma}\right)^{1/3}. \qquad (34)$$

Die Formel hat natürlich nur einen Sinn, wenn $R_2 > s$ herauskommt. Deshalb sind auch in der Tabelle V $\frac{R_2}{s}$ und $R_2\sqrt[3]{n}$ nur bis $\frac{b}{V} = 0{,}2$ berechnet. Der Grund dafür, daß für größere Argumente kein häufigster Abstand existiert, ist der, daß bei kleineren Raumerfüllungen w als Funktion von r durch eine Kurve des Typus der Fig. 3 dargestellt wird, während w bei

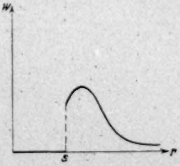


Fig. 3.

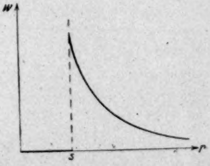


Fig. 4.

dichteren Lagerungen einen Verlauf wie in Fig. 4 hat.

La Plata, Instituto de Física, 30. September 1921.

(Eingegangen 23. November 1921.)

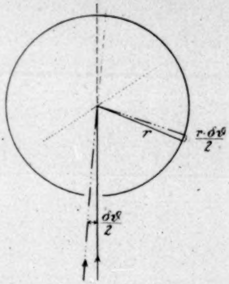
1) Zahlenwerte bei Landolt-Börnstein, Physikal.-chemische Tabellen. 4. Aufl. Berlin 1912, S. 140.

Bemerkung zu Gerlach, „Kristallgitteruntersuchungen mit Röntgenstrahlen" (diese Zeitschr. 22, 558, 1921).

Von Fritz Kirchner.

In der obigen Arbeit wird unter VI über die Ausmessung der doppelt vorhandenen Reflexionspünktchen auf verschiedenen Interferenzaufnahmen berichtet zum Zwecke der Bestimmung der Wellenlängendifferenz des erzeugenden Dubletts. Es sind 7 gemessene Werte angegeben, die zwischen 0,132 Proz. und 0,136 Proz. liegen, während die wirkliche Wellenlängendifferenz des K_α-Dubletts des *Cu* 0,246 Proz. beträgt. Es ist zwar nicht der Weg angegeben, auf dem diese Werte berechnet sind; es scheint aber, daß bei der Berechnung nicht berücksichtigt worden ist, daß die beiden Pünktchen durch Reflexion an d e m s e l b e n Kristall, also auch an g e n a u parallelen Netzebenen entstanden sind. Dieser Umstand ändert bei den in Betracht kommenden kleinen Abständen das Resultat wesentlich.

In dem Bericht selbst ist bemerkt, daß die gemessenen Werte unabhängig von Stäbchendurchmesser, Spaltblende usw. sind. Wir nehmen deshalb an, daß das betrachtete Kriställchen genau im Mittelpunkt der Kamera liege, und zwar so orientiert, daß die Wellenlänge $K_{\alpha 1}$ an einer gewissen Ebene mit dem Glanzwinkel $\frac{\vartheta}{2}$ gerade reflektiert werden kann. Die Wellenlänge K_{α_2} kann nun aber nur dann an derselben Ebene reflektiert werden, wenn die auffallenden Primärstrahlen nicht streng parallel sind, sondern beim Auftreffen auf die Kristallebene eine Konvergenz von mindestens $\frac{\delta\vartheta}{2}$ aufweisen ($\delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$). Da $\frac{\delta\vartheta}{2}$ bei mittleren Ablenkungswinkeln für das K_α-Dublett etwa gleich $\frac{0{,}0006 \cdot 180^0}{2\pi} = 1{,}02'$ ist, dürfte diese Bedingung auch bei noch so kleiner Ausdehnung des Brennflecks der Röntgenröhre wohl stets erfüllt sein. Aus der Zeichnung geht nun ohne weiteres hervor, daß der auf dem Film gemessene Abstand der Reflexionspünktchen nicht $r \cdot \delta\vartheta$ liefert, wie etwa der Abstand zweier Reflexionslinien, die durch sehr viele und sehr kleine Kristallite oder durch Drehung eines Kristalls erzeugt wurden, sondern $\frac{r \cdot \delta\vartheta}{2}$. In der Tat findet man, wenn man den bei den Messungen gefundenen Wert 0,135 Proz. mit 2 multipliziert, 0,27 Proz. also einigermaßen gute Übereinstimmung mit dem von **Siegbahn** (Ann. d. Phys.



59, 53, 1919) durch Präzisionsmessungen bestimmten Wert 0,246 Proz.

J e n a, Physikalisches Institut der Universität, 10. Dezember 1921.

(Eingegangen 13. Dezember 1921.)

Das K_α-Dublett, nebst einer Neubestimmung der Gitterkonstanten einiger Kristalle.

Von Walther Gerlach.

In einer kürzlich in dieser Zeitschrift[1]) erschienenen Mitteilung wurde darauf hingewiesen, daß die K_α-Linien auf Debye-Scherrer-Photogrammen nicht einfach, sondern doppelt sind. Diese Feinstruktur kommt zur Geltung, wenn man statt sehr feinen Pulvers ein etwas gröberes Korn — noch immer „Pulver" — als Reflexionsstäbchen verwendet. Es treten dann nämlich die bekannten scharfen Pünktchen als Dubletten auf, sehr schmal, scharf begrenzt, mit einer gewissen, von dem Öffnungswinkel der Röntgenstrahlung abhängigen Länge. Schon damals war erwähnt worden, daß die Abstände zweier zusammengehörender Pünktchen nur abhängig vom Reflexionswinkel sind, unter dem sie liegen, insbesondere unabhängig vom Material des Stäbchens und der Anordnung. Es war darauf hingewiesen worden, daß es nur möglich erscheint, sie als von 2 nahe benachbarten Wellenlängen der zur Reflexion kommenden Strahlung herrührend anzusehen; jedoch ergab sich ein $\delta\lambda$, welches nur etwa halb so groß war, als der bisher angenommene Dublettabstand $K_{\alpha_2} - K_{\alpha_1}$. Nachdem nun einerseits Herr **Kirchner** den damals bei der Berechnung untergelaufenen Fehler — Faktor 2! — erkannt hat (s. die vorstehende Notiz); andererseits zahlreiche Aufnahmen gemacht wurden, um die

1) W. Gerlach, diese Zeitschr. **22**, 557, 1921.

Feinstruktur messen zu können, seien im folgenden die bis jetzt erhaltenen Versuchsergebnisse mitgeteilt.

Die genannte Anordnung kann als Spektrograph mit einem Spalt angesehen werden, der an Feinheit jedem durch Blenden herstellbaren überlegen sein dürfte. In bekannter Weise hergestellte Debye-Scherrer-Photogramme werden ausgewertet, ohne zunächst auf die Feinstruktur der Reflexionspünktchen Rücksicht zu nehmen; die aus den Abständen direkt berechneten Glanzwinkel δ müssen korrigiert werden auf Reflexion im Mittelpunkt des 1,0 und 1,5 mm dicken Stäbchens und wegen der Verlagerung des Maximums der Schwärzung durch die endliche Breite des primären Röntgenstrahlbündels; beides geschieht unter der für die im folgenden verwendeten Substanzen sehr angenähert gültigen Annahme, daß Reflexion nur an der Oberfläche des Stäbchens erfolgt[1]). Aus den Werten $\delta/_2$, den Indizes $h_1\, h_2\, h_3$ und der Wellenlänge λ ergibt sich die Länge des Elementarwürfels a

$$a = \frac{\lambda \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}{2 \sin \delta/_2} = \frac{\lambda}{2\bar{C}} \cdot \frac{1}{\sin \delta/_2},$$

worin C das Mittel sämtlicher $\dfrac{\sin\delta/_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$ Werte ist. Mit diesem C-Werte werden die einzelnen $\delta/_2$-Werte ausgeglichen, sie sind im folgenden mit $\bar{\delta}/_2$ bezeichnet. Werden an ein und demselben Mikrokriställchen zwei nahe benachbarte Wellenlängen λ und $(\lambda + \partial\lambda)$ reflektiert, was wegen des endlichen Öffnungswinkels des in die Kamera eintretenden Röntgenstrahlenbündels möglich ist, so gehen von jedem solchen Kriställchen zwei Kegel aus, deren Öffnungswinkel sich um $\partial\delta$ unterscheiden; sie erzeugen auf dem Film zwei parallele Linien, deren senkrechter Abstand h mm sein soll. Ist der Radius der Kamera r, so folgt aus

$$\sin\frac{\bar{\delta}}{2} = \lambda \cdot \bar{C}; \qquad \cos\frac{\bar{\delta}}{2} = \frac{\partial\lambda}{\partial\frac{\delta}{2}} \cdot \bar{C} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\lambda} = \operatorname{ctg}\frac{\bar{\delta}}{2} \cdot \frac{1}{2}\frac{h}{r} \tag{2a}$$

oder da $r = 25$ mm ist,

$$\frac{\partial\lambda}{2\lambda} = h \cdot \operatorname{ctg}\frac{\bar{\delta}}{2} \times 10^{-2}, \tag{2b}$$

hierbei ist angenommen, daß die Reflexion senkrecht zur Stäbchenachse erfolgt ist. Dies gilt aber nicht einmal streng für die in der Mittellinie des Films liegenden Reflexionspünktchen, da der primäre Röntgenstrahl des Kristallpulverstäbchens mit einem Öffnungswinkel von mehreren Grad in einer Höhe von etwa 3—5 mm trifft. Die hierdurch bedingte Abweichung ist überhaupt nicht berechenbar. Wohl aber ist es möglich, die Änderung von h mit zunehmendem Abstand der Reflexionspünktchen von der Mittellinie des Films genau zu berechnen. Herr E. Madelung war so freundlich, mir für diese umständliche Korrektionsberechnung eine einfache und bequem zu tabellierende Formel aufzustellen, wofür ich ihm herzlichen Dank schulde. Ist r der Radius des Films, z die Entfernung eines doppelten Reflexionspünktchens von der Mittellinie des Films, $\varphi = \frac{z}{r}$, h' der Abstand zweier zusammengehöriger, von λ und $\lambda + \partial\lambda$ herrührender Pünktchen, δ der halbe Öffnungswinkel des Reflexionskegels, so ist der in (2) einzusetzende Wert h

$$h = h'\sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{(1+\varphi^2)^2}\left(1 + \frac{\varphi^2}{\sin^2\delta}\right)}. \tag{3}$$

Die für $\frac{\partial\lambda}{\lambda}$ zu erreichende Genauigkeit hängt also ab von dem korrigierten Glanzwinkel, d. h. von der Gitterkonstante (oder der Länge des Elementarwürfels) und von der Abstandsmessung h. Der mögliche Fehler in $\operatorname{ctg}\delta/_2$ ist zu rund 1 Proz. anzusetzen; die Genauigkeit der Abstandsmessung ist wesentlich verschieden, je nach der Schärfe der Reflexionspünktchen und der Schwärzung des Untergrundes. Außerdem stand mir nur ein nicht ganz geeignetes Okularmikrometer (21,30 Trommelteile entsprechen einer Verschiebung der Marke um 100 μ) zur Verfügung, das mit einem Zeißschen Objektmikrometer (1 mm in 100 Teilen) mehrfach geeicht wurde. Die hierbei festgestellte Einstellgenauigkeit betrug etwa $\pm 5\,\mu$. Diese beträchtliche Unsicherheit konnte nur durch mehrfache Messung jedes einzelnen h'-Wertes herabgesetzt werden. Eine prinzipielle Unsicherheit liegt in der — oben betonten — Tatsache, daß die reflektierenden Mikrokristalle über eine gewisse Höhe verteilt liegen. Solange man jedoch Pünktchen wegläßt, deren φ zu groß ist (oberer und unterer Rand des Films), ist dieser Fehler nicht über ± 2 Proz. zu setzen. Da hierdurch die Korrektionsgröße (3) sowohl zu groß als zu klein werden kann, ist es zudem möglich, durch kritische Sichtung der Messungen ihn recht weitgehend zu vermeiden.

Wenn somit die bis jetzt benutzte Anordnung noch nicht ideal für eine Präzisionsmessung ist, so scheint doch die mit ihr erreichte Genauigkeit größer zu sein als die der

1) Siehe W. Gerlach u. O. Pauli, Zeitschr. f. Phys., 7, 116, 1921. Der hier angegebene Wert für die Gitterkonstante des MgO ist nach den Resultaten der vorliegenden Arbeit um 1,2 Promille zu erhöhen.

bisherigen Methoden, nicht zum wenigsten durch die große Schärfe der beiden Pünktchen. Es sind bereits Vorversuche mit zweckmäßiger Anordnung ausgeführt, auf denen der Abstand der beiden Komponenten auf das Zehnfache gesteigert ist. Diese Versuche werden fortgesetzt und auf andere Strahler ausgedehnt werden, sobald mir wieder ein Transformator zur Verfügung steht.

Im folgenden sind tabellarisch die Messungsergebnisse zusammengestellt, welche eine recht genaue Bestimmung des Gitterkonstanten der benutzten Kristalle und die gesuchte Größe des Dublettabstandes liefern. Die zur Bestimmung der Gitterkonstanten dienenden Tabellen enthalten die gemessenen $\delta/_2$-Werte, die zur $\frac{\partial\lambda}{\lambda}$-Bestimmung gehörenden Tabellen die ctg $\frac{\delta}{2}$-Werte. Die Berechnungen sind, bis auf die sinus- und cotangens-Werte mit dem Rechenschieber ausgeführt, die a-Berechnungen aus λ und $\overline{C}$ logarithmisch.

Ein Beispiel für die Wirksamkeit der Madelungschen Korrektion geben folgende Zahlen, welche den Abstand z, die gemessenen h' und die korrigierten h-Werte, letztere in Trommelteilen des Mikrometers geben:

z	0	2,5	4	5	7	10	15	22
h'	12,2	13,1	12,2	13,3	12,7	13,9	14,2	16,9
h	12,2	13,0	12,1	13,0	12,2	12,9	12,2	12,9

Mit Kupferantikathode (K-Strahlung) wurden aufgenommen zwei verschiedene Silicium, reguläre Zinkblende, Calciumfluorid und Kupfer; mit Nickel-K-Strahlung ein Silicium und Calciumfluorid.

Kupfer-K_α-Strahlung.

Silicium als reflektierende Substanz[1]).

Zur Messung der Feinstruktur sind 2 Aufnahmen brauchbar. Die Kristallsplitterstäbchen waren 1 mm dick, Tabelle I enthält die für die Kupfer K_α-Strahlung ermittelten $\delta/_2$- und C-Werte.

Hieraus folgt für die Gitterkonstante $a_{\bar\alpha}$: 5,439 bzw. 5,417 Å.-E., wenn für die Wellenlängen eingesetzt wird:

$$\frac{K_{\alpha_1} + K_{\alpha_2}}{2} = \bar{\alpha} = 1{,}5393 \text{ Å.-E.}^{2)}.$$

Tabelle I.

Graphitisches Silicium.

$\delta/_2$	h_1	h_2	h_3	C
68°9′	5	3	3	0,1416
63°42′	6	2	0	0,1418
57°5′	5	3	1	0,1418
53°21′	4	4	0	0,1417
47°44′	3 5	3 1	3 1	0,1422
43°51′	4	2	2	0,1413
37°59′	3	3	1	0,1413
34°18′	4	0	0	0,1410
28°6′	3	1	1	0,1421
23°36′	2	2	0	0,1415
14°11′	1	1	1	0,1412
			Mittel	0,1416 ± 0,35 Proz.

Tabelle II.

Kristallisiertes Silicium.

$\delta/_2$	h_1	h_2	h_3	C
68°15′	5	3	3	0,1417
63°42′	6	2	0	0,1418
57°12′	5	3	1	0,1420
53°27′	4	4	0	0,1420
47°42′	3 5	3 1	3 1	0,1422
44°12′	4	2	2	0,1422
38°30′	3	3	1	0,1428
34°30′	4	0	0	0,1418
28°6′	3	1	1	0,1421
23°45′	2	2	0	0,1422
14°20′	1	1	1	0,1423
			Mittel	0,1421 ± 0,35 Proz.

Die zweite Aufnahme enthielt auch alle β-Linien, aus denen mit

$$K_\beta = 1{,}388 \text{ Å.-E. folgt } a_\beta = 5{,}39 \text{ Å.-E.}$$

Die Messung von Debye und Scherrer[1]) hatte zu $a = 5{,}46 \times 10^{-8}$ cm bzw. $5{,}31 \times 10^{-8}$ cm für die K_{α_1}- bzw. K_β-Linie des Kupfers, wobei auf letzteren kein Gewicht zu legen ist, da sämtliche β-Linien auf ihren Aufnahmen als äußerst schwach bezeichnet sind, ersterer dagegen in Übereinstimmung mit den neuen Messungen ist.

Die Messung der Feinstruktur der Reflexionspünktchen ist in Tabelle III und IV gegeben, welche den Kotangens des ausgeglichenen δ-Wertes gibt, die nach (3) korrigierten h-Messungen, die $\frac{\partial\lambda}{2\lambda}$-Werte und die maximalen Abweichungen der einzelnen Messungen, n die Anzahl der gemessenen doppelten Pünktchen, und schließlich die Abweichungen vom Mittel.

1) Es sei hier darauf hingewiesen, daß zwischen „amorphen" (rostbraun), „graphitischem" (feine schwarze Plättchen) und „kristallisiertem" Silicium sich keinerlei erkennbare Unterschiede in der Gitterkonstante oder der Gitterstruktur ergeben haben.

2) Siegbahn, Phil. Mag. **29**, 601, 1919. $K_{\alpha_1} = 1{,}5374$; $\alpha_2 = 1{,}5412$.

1) Gött. Nachr. 1916, S. 1. Mit unseren Wert K_α berechnet sich die Messung von Debye und Scherrer zu $a = 5{,}41$ Å.-E.

Tabelle III.

Silicium kristallisiert. Kupferstrahlung.

ctg $\delta/2$	h mm	$\frac{\delta\lambda}{2\lambda} \times 10^3$	n	Differenzen gegen das Mittel
0,401	0,154$_9$	124,$_2$ ± 1,5 Proz.	7	— 0,7
0,401	0,158$_7$	127,$_1$ ± 3 „	5	+ 2,2
0,499	0,128$_7$	128,$_2$ ± 5 „	3	+ 3,3
0,499	0,126$_8$	126,$_3$ ± 7 „	8	+ 1,4
0,648	0,095$_8$	123,$_8$ ± 3 „	10	— 1,1
0,648	0,095$_5$	123,$_8$ ± 5 „	6	— 1,1
0,745	0,081$_6$	121,$_5$ ± 7 „	6	— 3,4
0,745	0,082$_2$	122,$_3$ ± 6 „	8	— 2,6
0,920	0,067$_6$	124,$_2$ ± 2,5 „	6	— 0,7
1,036	0,059$_2$	122,$_8$ ± 8 „	10	— 2,1
1,036	0,062$_5$	129,$_4$ ± 8 „	8	+ 4,5
	Mittel	124,$_9$		

Tabelle IV.

Silicium graphitisch. Kupferstrahlung.

ctg $\delta/2$	h mm	$\frac{\delta\lambda}{2\lambda} \times 10^3$	n	Differenzen gegen das Mittel
0,645	0,095$_0$	122,$_3$ ± 1 Proz.	3	— 4,9
0,645	0,096$_6$	124,$_6$ ± 1,5 „	2	— 2,6
0,740	0,084$_0$	124,$_2$ ± 3,5 „	8	— 3,0
0,740	0,087$_8$	129,$_9$ ± 4 „	2	+ 2,7
0,910	0,072$_7$	132,$_2$ ± 5 „	9	+ 5,0
1,028	0,063$_9$	131,$_2$ ± 7 „	9	+ 4,0
1,028	0,061$_5$	126,$_2$ ± 4 „	8	— 1,0
	Mittel	127,$_2$		

Calciumfluorid als reflektierende Substanz.

Ein CaF_2-Film, gewonnen mit einem 1,5 mm dicken Stäbchen aus gepulvertem, klaren Flußspat, zeigte nicht sehr viele, aber sehr scharfe und genau ausmeßbare doppelte Reflexionspünktchen. Der Film hatte besonders scharfe Linien, so daß er zu einem sehr sicheren Werte der Gitterkonstante führte. Es ergab sich ferner das Braggsche Modell des Kristallgitters. Es ist wichtig dies zu betonen, weil dasselbe mehrfach theoretischen Betrachtungen zugrunde gelegt wurde, und weil kürzlich Wyckhoff[1]) Bedenken gegen dieses Modell geäußert hat. Tabelle V gibt zunächst die gemessenen Werte der Glanzwinkel, die Indizes und die C-Werte für die K_α-Strahlung des Kupfers.

Von den Indizes, deren Summe nicht durch 4 teilbar ist, ist nur 200 gerade erkennbar, während 222, 420 usw. fehlen. Das Braggsche Gitter hat die relativen Koordinaten:

Ca 0 0 0	F 1/4 1/4 1/4	1/4 3/4 3/4
0 1/2 1/2	1/4 1/4 3/4	3/4 1/4 3/4
1/2 0 1/2	1/4 3/4 1/4	3/4 3/4 1/4
1/2 1/2 0	3/4 1/4 1/4	3/4 3/4 3/4

1) Journ. Franklin Inst. 191, 199, 1921.

Tabelle V.

Intensität	$\delta/2$	h_1	h_2	h_3	C
m	14°10′	1	1	1	0,1410
sss	16°20′(?)	2	0	0[1])	0,141 (?)
st	23°27′	2	2	0	0,1409
st	27°53′	3	1	1	0,1412
m	34°12′	4	0	0	0,1406
mst	37°57′	3	3	1	0,1412
st	43°42′	4	2	2	0,1410
mst	47°12′	{3 {5	3 1	3 1	0,1413
mst	53°3′	4	4	0	0,1411
st	56°30′	5	3	1	0,1410
st	63°12′	6	2	0	0,1412
mst	67°42′	5	3	3	0,1412
				Mittel	0,1411 ± 0,1 Proz.

Der Strukturfaktor

$$S = Ca\left(1 + e^{i\pi(h_1+h_2)} + e^{i\pi(h_1+h_3)} + e^{i\pi(h_2+h_3)}\right) + Fe^{\frac{i\pi}{2}(h_1+h_2+h_3)}\left\{1 + e^{i\pi h_1} + e^{i\pi h_2} + e^{i\pi h_3} + e^{i\pi(h_1+h_2+h_3)} + e^{i\pi(h_1+h_2)} + e^{i\pi(h_1+h_3)} + e^{i\pi(h_2+h_3)}\right\}$$

verlangt gerade für die Linien 200, 420 usw. eine sehr geringe Intensität. Über die Ladung der Ionen ist hier nichts zu sagen, da der absolute Betrag der Differenz der Anzahl der Elektronen der neutralen Atome $Ca - 2F$ und der Ionen $Ca^{++} - 2F^-$ gleich ist.

Aus dem mittleren Wert $K_{\bar{\alpha}}$ (s. o.) ergibt sich für die Länge des Elementarwürfels $a = 5{,}455 \times 10^{-8}$ cm, während sich aus der Dichte $\sigma = 3{,}18_1$ (Madelung und Fuchs)[2]) $5{,}452 \times 10^{-8}$ cm berechnet, eine vollkommene Übereinstimmung.

Die Messung der Reflexionsdubletten ergab die Werte in Tabelle VI.

Tabelle VI.

Calciumfluorid, Kupfer-K-Strahlung.

ctg $\bar{\delta}/2$	h mm	$\frac{\delta\lambda}{2\lambda} \times 10^3$	n	Differenz gegen das Mittel
0,505	0,125$_4$	126,7 ± 0,5 Proz.	7	+ 2,1
0,505	0,124$_0$	125,2 ± 1 „	7	+ 0,6
0,751	0,081$_3$	122,0 ± 1 „	3	— 2,6
0,751	0,082$_6$	124,0 ± 5 „	3	— 0,6
0,925$_5$	0,068$_1$	126,0 ± 2 „	4	+ 1,4
1,042	0,059$_6$	124,0 ± 5 „	12	— 0,6
	Mittel	124,$_6$		

Reguläre Zinkblende als reflektierende Substanz.

Ein Stück eines großen, ziemlich klaren Kristalls aus Sandanter, den mir Herr Made-

1) Nur gerade aus zwei Reflexionspünktchen erkennbar.

2) E. Madelung u. R. Fuchs, Ann. d. Phys. 65, 289, 1921.

lung aus seinem Kompressibilitätsbestimmungsmaterial gab, wurde mäßig fein gepulvert. Die Gitterkonstante und die reguläre Kristallform folgt aus Tabelle VII, die Intensitätsverhältnisse stimmen qualitativ mit dem Braggschen Diamantmodell überein. Die Tabelle enthält nur die α-Linien aus 2 Aufnahmen (Stäbchen 1,5 mm Durchmesser) mit Kupfer-K-Strahlung.

Tabelle VII.

Intensität	$\delta/2$ I	$\delta/2$ II	h_1	h_2	h_3	C I	C II
st	14°24′	14°27′	1	1	1	$0{,}143_2$	$0{,}143_7$
s	16°46′	17° (?)	2	0	0	$0{,}143_8$	$0{,}146$?
st	24°,0′	23°58′	2	2	0	$0{,}143_6$	$0{,}143_4$
st	28°24′	28°21′	3	1	1	$0{,}143_2$	$0{,}142_8$
s	29°17′	29°51′	2	2	2	$0{,}141_3$	$0{,}143_6$
mst	34°48′	34°41′	4	0	0	$0{,}142_7$	$0{,}142_1$
st	38°39′	38°36′	3	3	1	$0{,}143_1$	$0{,}142_8$
st	44°30′	44°30′	4	2	2[1]	$0{,}143_0$	$0{,}143_0$
st	47°54′	47°48′	3 5	3 1	3 1	$0{,}142_7$	$0{,}142_6$
mst	53°54′	53°54′	4	4	0	$0{,}142_7$	$0{,}142_7$
st	57°42′	57°33′	5	3	1	$0{,}142_6$	$0{,}142_7$
st	64°24′	64°0′	6	2	0	$0{,}142_5$	$0{,}142_1$
st	69°12′	69°18′	5	3	3	$0{,}142_6$	$0{,}142_8$
mst	71°40′	72°0′	6	2	2	$0{,}143_6$	$0{,}143_2$
					Mittel	$0{,}142_7$	$0{,}142_9$
						$\pm$ 0,2 Proz.	$\pm$ 0,4 Proz.

Hieraus folgt mit dem schon oben angegebenen $\lambda_{\bar{\alpha}}$-Wert für die Gitterkonstante $a = 5{,}394$ bzw. $5{,}386 \times 10^{-8}$ cm, während aus Molekulargewicht (97,46), Avogadroscher Zahl $(60{,}6 \times 10^{22})$ und Dichte $(\sigma = 4{,}09_2)$[2]) folgt:

$$a = 5{,}39_7 \text{ Å.-E.}$$

Die Ausmessung und Auswertung der Dubletten gibt die folgende Tabelle VIII.

Tabelle VIII.

Reguläre Zinkblende; Kupfer-K-Strahlung.

ctg $\delta/2$	h mm	$\frac{\delta\lambda}{2\lambda} \times 10^3$	n	Differenz gegen das Mittel
0,379	0,167	126,5 $\pm$ 4,5 Proz.	9	+ 4,3
0,379	0,162	122,8 $\pm$ 1 "	2	+ 0,6
0,479	$0{,}126_2$	121,0 $\pm$ 3 "	9	− 1,2
0,479	$0{,}130_0$	124,5 $\pm$ 3,5 "	6	+ 2,3
0,636	$0{,}095_8$	122,0 $\pm$ 2 "	7	− 0,2
0,636	$0{,}092_5$	117,5 $\pm$ 5 "	9	− 4,7
0,729	$0{,}080_4$	117,2 $\pm$ 3 "	9	− 5,0
0,729	$0{,}081_3$	118,8 $\pm$ 2,5 "	4	− 3,4
$0{,}903_5$	$0{,}068_1$	123,0 $\pm$ 3 "	9	+ 0,8
$0{,}903_5$	$0{,}070_0$	126,2 $\pm$ 4 "	6	+ 4,0
1,020	$0{,}059_2$	120,8 $\pm$ 3 "	17	− 1,4
1,020	$0{,}062_0$	126,4 $\pm$ 7 "	13	+ 4,2
	Mittel	122,2		

1) 420 war gerade erkennbar, aber nicht meßbar.

2) Nach E. Madelung und R. Fuchs, Ann. d. Phys. **65**, 289, 1921; Landolt-Börnstein gibt $\sigma = 3{,}98$ bzw. 4,06, woraus folgt $a = 5{,}447$ bzw. 5,411, von denen wir den ersteren auf Grund der direkten a-Bestimmung mit Sicherheit ausschließen können.

Kupfer als reflektierende Substanz.

Das Stäbchen bestand aus einem dünnen, gewalzten Kupferblech, welches zu einem Röhrchen von 1,5 mm Durchmesser aufgewickelt war. Tabelle IX gibt die Gitterkonstantenbestimmung.

Tabelle IX.

Intensität	$\frac{\delta}{2}$	h_1	h_2	h_3	C
st	21°26′	1	1	1	$0{,}211_0$
st	25°2′	2	0	0	$0{,}211_8$
st	36°56′	2	2	0	$0{,}212_0$
st	44°50′	3	1	1	$0{,}211_0$
mst	47°15′	2	2	2	$0{,}211_5$
st	58°24′	4	0	0	$0{,}212_6$
st	68°3′	3	3	1	$0{,}212_6$
st	72°6′	4	2	0	$0{,}212_2$
					$0{,}211_8$

Hieraus folgt mit dem Kupfer-$K_{\bar{\alpha}}$-Wert für die Länge des Elementarwürfels $\alpha = 3{,}63_4 \times 10^{-8}$ Å.-E., während das spezifische Gewicht $3{,}614 \times 10^{-8}$ cm liefert ($\sigma = 8{,}90$ nach Madelung-Fuchs l. c.). Die Differenz von 0,55 Proz. zwischen berechnetem und beobachtetem Werte ist, da σ hier genau bekannt ist, etwas größer als bei anderen Bestimmungen. Es ist nicht unmöglich, daß das Kupfer durch das Walzen deformiert war, denn die Interferenzlinien waren breiter als normal.

Tabelle X gibt die Feinstrukturmessung.

Tabelle X.

Kupferblech; Kupfer-K-Strahlung.

ctg $\frac{\delta}{2}$	h mm	$\frac{\delta\lambda}{2\lambda} \times 10^3$	n	Differenz gegen das Mittel
0,419	$0{,}154_0$	128,5 $\pm$ 3 Proz.	9	+ 3,2
0,419	$0{,}151_0$	126,6 $\pm$ 2 "	3	+ 1,3
0,628	$0{,}099_2$	124,6 $\pm$ 3 "	6	− 0,7
0,628	$0{,}102_2$	128,1 $\pm$ 2 "	7	+ 2,8
0,927	$0{,}067_9$	125,8 $\pm$ 2 "	2	+ 0,5
0,927	$0{,}068_1$	126,2 $\pm$ 5 "	4	+ 0,9
1,014	$0{,}060_8$	123,3 $\pm$ 7 "	10	− 2,0
1,014	$0{,}060_1$	121,8 $\pm$ 5 "	4	− 3,5
1,332	$0{,}046_3$	123,0 $\pm$ 5 "	12	− 2,3
	Mittel	125,3		

Nickel-K_α-Strahlung.

Anordnung und Methodik waren unverändert. Die Nickelantikathode war aus vakuumgeschmolzenem Nickel hergestellt, das mir Herr Dr. Rohn (von der Firma W. C. Heraeus, Hanau) freundlicherweise schenkte, wofür ich auch an dieser Stelle danke. Es enthält nur noch minimale Mengen (0,02 Proz. etwa) Kupfer als Verunreinigung.

Silicium als reflektierende Substanz.

Das Kristallsplitterstäbchen aus graphitischem Silicium war 1 mm dick. Tabelle XI gibt zunächst die Bestimmung der Reflexionswinkel der K_α-Linien von Nickel. Es waren außerdem sämtliche β-Linien vorhanden, deren C'-Wert ohne die $\delta/_2$ anzugeben), in Spalte 4 enthalten sind.

Tabelle XI.

$\delta/_2(\alpha)$	h_1	h_2	h_3	C_α	C'_β
75°6′	6	2	0	$0{,}152_8$	$0{,}138_7$[1])
64°54′	5	3	1	$0{,}153_0$	$0{,}138_8$
60°6′	4	4	0	$0{,}153_1$	$0{,}138_8$
52°57′	{3 {5	3 1	3 1	$0{,}153_3$	$0{,}139_2$
49°0′	4	2	2	$0{,}153_7$	$0{,}139_2$
42°15′	3	3	1	$0{,}154$ [2])	$0{,}139_9$[2])
37°45′	4	0	0	$0{,}153_3$	$0{,}139_9$
30°33′	3	1	1	$0{,}153_4$	$0{,}139_5$
25°46′	2	2	0	$0{,}153_3$	$0{,}139_5$
15°27′	1	1	1	$0{,}153_7$	$0{,}139_4$
			Mittel	$0{,}153_1$ $\pm$ 0,27 Proz.	$0{,}139_1$ $\pm$ 0,43 Proz.

Hieraus folgt eine Gitterkonstante von $a_\alpha = 5{,}410$ Å.-E. für die α-Linien und $a_\beta = 5{,}38$ Å.-E. für die β-Linien, wenn als Wellenlängen eingesetzt werden: Mittel von K_{α_1}- und $K_{\alpha_2} = \bar{\alpha} = 1{,}6566$ Å.-E.[3]) bzw. $K_\beta = 1{,}497$ Å.-E., in Übereinstimmung auf $\pm 0{,}2$ Proz. mit der Kupfermessung.

Die Ausmessung und Auswertung der α-Dubletten gibt Tabelle XII.

Tabelle XII.

ctg $\delta/_2$	h mm	$\frac{\delta\lambda}{2\lambda} \times 10^3$	n	Differenz gegen das Mittel
0,466	$0{,}122_0$	114,0 $\pm$ 3,5 Proz.	6	+ 1,5
0,575	0,095	109,2 $\pm$ 7 „	8	— 3,3
0,575	0,094	108,2 $\pm$ 3,5 „	7	— 4,3
0,761	$0{,}072_8$	110,7 $\pm$ 3 „	7	— 1,8
0,761	$0{,}073_7$	112,2 $\pm$ 4,5 „	3	+ 0,3
0,882	$0{,}063_5$	111,9 $\pm$ 2 „	10	— 0,6
0,882	$0{,}062_5$	110,2 $\pm$ 7 „	6	— 2,3
1,117	$0{,}052_6$	117,3 $\pm$ 9 „	6	+ 4,8
1,117	$0{,}049_3$	110,1 $\pm$ 5 „	6	— 2,4
1,288	$0{,}045_5$	117,1 $\pm$ 5 „	6	+ 4,6
1,288	$0{,}045_5$	117,1 $\pm$ 2,5 „	2	+ 4,6
	Mittel	112,5		

Calciumfluorid als reflektierende Substanz.

Tabelle XIII gibt die Bestimmung der Gitterkonstanten des Calciumfluorids mit Nickel-$K\alpha$-Strahlung. Präparat und Anordnung waren die gleiche wie bei der Aufnahme mit Kupferstrahlung.

Tabelle XIII.

Intensität	$\delta/_2$	h_1	h_2	h_3	C
mst	18°5′	1	1	1	$0{,}150_2$
st	25°20′	2	2	0	$0{,}151_1$
mst	30°9′	3	1	1	$0{,}151_3$
m	37°6′	4	0	0	$0{,}150_8$
m	41°6′	3	3	1	$0{,}150_9$
st	47°51′	4	2	2	$0{,}151_1$
mst	51°54′	{3 {5	3 1	3 1	$0{,}151_2$
m	59°0′	4	4	0	$0{,}151_3$
st	63°42′	5	3	1	$0{,}151_3$
st	73°48′	6	2	0	$0{,}151_8$
				Mittel	$0{,}151_2$ $\pm$ 0,2 Proz.

Aus der mittleren Wellenlänge $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \alpha = 1{,}6566$ Å.-E. folgt als Länge des Elementarwürfels $a = 5{,}478 \pm 0{,}2$ Proz. $\times 10^{-8}$ cm, während die — an sich bessere — Kupferaufnahme den nur um 0,3 Proz. niedrigeren Wert $5{,}455 \pm 0{,}1$ Proz. ergeben hatte, also wiederum eine vollkommene Übereinstimmung.

Die Messung der doppelten Reflexionspünktchen gibt Tabelle XIV.

Tabelle XIV.

Calciumfluorid. Nickel-K_α-Strahlung.

ctg $\delta/_2$	h mm	$\frac{\delta\lambda}{2\lambda} \times 10^3$	n	Differenz gegen das Mittel
0,600	$0{,}096_8$	116,1	1	+ 0,9
0,905	$0{,}063_3$	114,0 — 1,5 Proz.	2	— 1,2
1,144	$0{,}049_4$	113,0 $\pm$ 6 „	2	— 2,2
1,144	$0{,}050_8$	116,2 $\pm$ 2 „	3	+ 1,0
1,310	0,044	115,3 $\pm$ 4 „	4	+ 0,1
1,310	$0{,}044_5$	116,6 $\pm$ 3 „	2	+ 1,4
		115,2		

Tabelle XV gibt zusammengestellt die Werte des Abstandes $\alpha_2 - \alpha_1$ in X.-E. (1 X.-E. $= 10^{-11}$ cm).

Von einer Bewertung der einzelnen Zahlen wurde abgesehen, da alle — bis auf die mit Nickelstrahlung an Calciumfluorid — aus etwa gleich zahlreichen und sicheren Einzelmessungen gewonnen sind.

Sommerfelds[1]) Formel für $\Delta\nu$ des $\alpha_1\alpha_2$-Dubletts:

$$\frac{\Delta\nu}{(N-3{,}5)^4} = \Delta\nu_H \left[1 + \frac{5\alpha^2}{2}\left(\frac{N-3{,}5}{2}\right)^2 + \frac{53\alpha^4}{8}\left(\frac{N-3{,}5}{2}\right)^4 \right]$$

1) Außerdem β 444 $C' = 138_4$ vorhanden.
2) Verbreitert nach großen Winkeln durch β-Linien 422.
3) Nickel $K_{\alpha_1} = 1{,}6547$ Å.-E. Siegbahn, Phil. Mag. 37, 601, 1919.

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. (4) 51, 1, 1916.

die bei ruhigem Wetter selbst auf den Aufzeichnungen der östlichsten Stationen Pillau und Memel deutlich erkennbar sind, sind sie durchaus verschieden; ich will sie mit dem durch Forel in die Wissenschaft eingeführten Namen „Seiches" bezeichnen, was wohl der zutreffendste Ausdruck ist. Auf Veranlassung des Herrn Geheimrats Kühnen hat Herr Auel aus den Jahrgängen 1912—1914 (Juli) die auffälligsten, d. h. klar ausgesprochenen und nicht durch andere gestörten, „kleinen Perioden" herausgesucht; ich selbst habe die Jahrgänge 1910—1912 der Station Marienleuchte auf Fehmarn besonders eingehend bearbeitet und dabei auch den Bewegungen von mehr als einer Stunde Dauer größere Aufmerksamkeit geschenkt, während sie Herr Auel wegen ihrer meist unregelmäßigen Form gewöhnlich nicht berücksichtigt hat.

Zur Bestimmung der Periodenlänge wurde für jede Station eine nach Minuten fortschreitende Tabelle angelegt und die Häufigkeit des Vorkommens jeder Minute ihr beigeschrieben. Hierbei ergaben sich mehrere Häufigkeitsmaxima, entsprechend verschiedenen Periodenlängen, die zu trennen in den meisten Fällen ohne zu große Willkür möglich war. Jedenfalls hat die Übereinanderlagerung der Häufigkeitszahlen verschiedener Perioden mehr die Streuung der als Kollektivgegenstand anzusehenden Periodenlänge beeinflußt als ihren Wert selbst. Eine bei der Station Warnemünde vorgenommene Vergleichung mit den Brunsschen Tabellen zur Kollektivmaßlehre ergab eine fast völlige Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung.

In der Tabelle sind die Perioden nach den mutmaßlichen Vielfachen der kleinsten von etwa 8 Minuten Dauer gegeben. Unter der genauen Periodenlänge steht die Streuung, einmal wie der gewöhnliche mittlere Fehler berechnet, dann, in Klammern, aus dem mit $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sim 1{,}25$ multiplizierten Durchschnittsfehler. Zu unterst steht die Anzahl der benutzten Werte. Aus der meist geringen Differenz der beiden für die Streuung berechneten Werte ersieht man, daß die Verteilung der Werte dem Fehlergesetz nahezu entspricht. Tatsächlich ist immer eine geringe Unsymmetrie vorhanden, indem die Häufigkeitszahlen rascher zu- als abnehmen, doch ist sie meist unbedeutend.

Im Mittel aller Stationen treten reine Perioden von ca. 40 Minuten am häufigsten auf; sie entstehen vermutlich durch eine uninodale Querschwingung des sich westöstlich erstreckenden südlichen Teils der Ostsee. Bei der Bewertung dieser Häufigkeitszahlen ist jedoch die bei der Aufzeichnung gemachte Auslese zu berücksichtigen. Die sehr ungleiche relative Häufigkeit der Perioden an den einzelnen Stationen rührt wahrscheinlich von der besonderen Lage der Station, den Molen, den hinter mehreren

Tabelle.

Länge der Perioden (Seiches) in Minuten, darunter Streuung und Häufigkeit.

	I	II	III/IV	V	VI	VII		Summe
1. Travemünde			30,51 ± 2,7 (2,7) 35	39,51 ± 2,6 (2,8) 48				83
2. Marienleuchte	8,09 ± 1,6 (1,4) 23	15,50 ± 2,4 (2,5) 79	25,89 ± 2,5 (2,5) 169	36,90 ± 2,6 (2,8) 209	48,1 ± 4,0 (2,9) 20	67,1 ± 5,3 (7,3) 10	133 ± 19 (18½) 83	593
3. Wismar				40,0 ± 2,3 (2,1) 22	46,9 ± 2,0 (2,2) 16			38
4. Warnemünde		19,40 ± 2,2 (2,0) 106						106
5. Stolpmünde		20,79 ± 1,4 (1,5) 34	26,14 ± 2,2 (2,0) 44					78
6. Pillau				39,41 ± 1,5 (1,5) 17	47,74 ± 3,2 (3,4) 53	59,0 ± 3,9 (3,6) 8		78
7. Memel				38,3 ± 1,6 (1,9) 7	48,1 ± 4,1 (4,5) 52	61,9 ± 3,3 (3,3) 19		78

Stationen befindlichen Gewässern (Haffe, Breitlinge), der Entfernung von der Gegenküste, kurz der örtlichen Form des Wasserbeckens her.

Für Warnemünde habe ich, da hier die Verhältnisse infolge des Auftretens nur einer Periode besonders einfach liegen, noch einige weitere Größen bestimmt. Die mittlere Epoche fällt auf $12,2^h$ mittags, die Streuung beträgt 7,2 Stunden, es ist also keine Abhängigkeit von der Tageszeit vorhanden. Die mittlere Amplitude beträgt $30\frac{1}{2} \pm 40$ mm; die große Streuung erklärt sich hauptsächlich durch das einigemale vorgekommene Auftreten von Amplituden von etwa 150 mm, während sie sonst bedeutend kleiner sind. Im Mittel traten die Perioden in Gruppen von $4,7 \pm 1,8$ auf.

Das Studium dieser Erscheinungen soll in umfassenderem Maße fortgesetzt werden, um die Länge namentlich auch der größeren Perioden genauer zu bestimmen; auch soll dabei das simultane Auftreten der Bewegungen an verschiedenen Stationen und der Einfluß der meteorologischen Verhältnisse näher untersucht werden.

Potsdam, Geodätisches Institut, 29. November 1921.

(Eingegangen 1. Dezember 1921.)

Anwendung der Kapazitätsmessung durch Schwebungen zur Bestimmung kleiner Strahlungs- und Stromänderungen.

Von F. Kock und G. Schweikert.

Von verschiedener Seite[1]) ist zur Messung kleiner Kapazitäten und Kapazitätsänderungen eine Methode verwandt worden, bei welcher Schwebungen in gekoppelten Kreisen benutzt werden. Eine Glühkathodenröhre erregt einen Schwingungskreis I zu Schwingungen von der Schwingungszahl n_1, mit welchem ein Schwingungskreis II mit wenig abweichender Schwingungszahl n_2 gekoppelt ist. In einem dritten gekoppelten mit Detektor versehenen Kreise entsteht eine Schwingung von der Schwingungszahl $n_2 - n_1$, die im Hörbarkeitsbereich liegt. Geringe Änderungen der Schwingungszahl n_2 und damit des Differenztones, welche durch geringe Kapazitätsänderungen des Kreises II entstehen, werden durch Vergleich mit einer Stimmgabel passender Schwingungszahl, oder durch Kopplung des Detektorkreises mit einem Tonkreis konstanter Schwingungszahl als Schwebungen hörbar gemacht.

1) Pungs u. Preuner, diese Zeitschr. 20, 543, 1919; Herweg, diese Zeitschr. 21, 572, 1920; Falkenberg, Ann. d. Phys. 61, 145, 1920.

Außer zur direkten Bestimmung von Kapazitätsänderungen hat die Methode Anwendungen für indirekte Messungen gefunden. Es werden die zu messenden geringen Kapazitätsänderungen bei der großen Empfindlichkeit der Methode benutzt, um kleine Längen[1]) und Winkeländerungen[2]) in bisher unerreichter Genauigkeit zu messen, indem ein Kondensator durch den zu messenden Vorgang beeinflußt wird. Diese Messungen legen es nahe, die Methode für weitere Anwendungen auszunutzen. In nachfolgendem sollen einige Ergebnisse angegeben werden, die bei Verwendung der Methode zur Messung der durch Wärmeausdehnung bewirkten Längenänderungen von Metallbändern in Bolometern und Hitzdrahtinstrumenten erzielt wurden. Bei der Art der Ausführung der Messung, d. h. der Einstellung auf einen bestimmten Schwebungston oder auf Verschwinden desselben, kann es sich, wenn nicht die ganze Meßanordnung geeicht wird, in erster Linie nur um vergleichende Messungen handeln.

1. Bolometer.

Bei Verwendung der Methode zu bolometrischen Messungen wurden zwei Anordnungen benutzt. In Fig. 1 wird die durch Bestrahlung

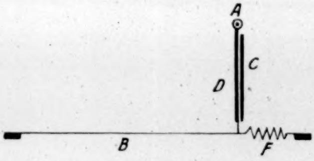


Fig. 1.

des Bolometerstreifens B bewirkte Ausdehnung benutzt, um die Platte des Plattenkondensators C um Punkt A zu drehen. Das Zurückdrehen der Platte D erfolgt durch eine Feder F. In Anordnung Fig. 2 ist eine doppelte Übertragung U

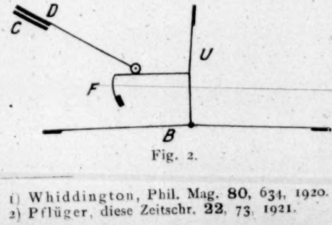


Fig. 2.

1) Whiddington, Phil. Mag. 80, 634, 1920.
2) Pflüger, diese Zeitschr. 22, 73, 1921.

zur Erreichung größerer Empfindlichkeit, ähnlich wie beim Hitzdrahtinstrument, angewandt. Als Strahlungsquelle wurde eine 16 K/80 V-Lampe benutzt, von der ein Teil des Fadens mit Linse auf dem Bolometerstreifen abgebildet wurde. Die Schwächung erfolgte durch Abblendung. Die Konstanten des Bolometers I waren folgende:

Länge des Streifens	50 mm
Breite	3 „
Dicke	0,04 mm
Material: Stanniol (geschwärzt),	
Plattengröße des Kondensators	3×3 cm
Abstand der Platten	0,1 mm

Bei allen Messungen wurde aus Gründen der Konstanz der Wellenlänge der Kreise 1, 2 diese ungefähr zu ca. 1000 m gewählt, während der Tonkreis auf $n = 1000$ abgestimmt war. Bei den Messungen wurde vor der Messung auf Verschwinden der Schwebungen eingestellt und zum Vergleich der Empfindlichkeit jeweils zwei Schwebungen in 5 Sekunden willkürlich als maximale Empfindlichkeit definiert. Zu Fig. 1 und 2 war der Abstand der Lampe vom Bolometer 4,50 m. Beim Bolometer 1 konnte noch ein auf das Bolometer auffallender Lichtstrom von $3{,}15 \cdot 10^{-3}$ Lumen durch $\frac{2 \text{ Schwebungen}}{5 \text{ sec}}$ leicht nachgewiesen werden.

Mit Bolometer, Fig. 2, das aus einem S. & H.-Hitzdrahtampèremeter mit Hitzband B bestand, an dessen Zeiger die eine Platte D eines Plattenkondensators C befestigt war (Plattengröße 1 cm, Plattenabstand 1 mm), ließ sich bei dem Hitzband aus Platin (30 mm lang, 10 mm breit und 0,02 mm dick) bei derselben Schwebungszahl ein Lichtstrom von $8{,}4 \cdot 10^{-4}$ Lumen nachweisen.

2. Hitzdrahtinstrumente.

Um die Empfindlichkeitssteigerung eines Hitzdrahtinstrumentes unter Verwendung eines mit dem Zeiger desselben verbundenen Kondensators zu bestimmen, wurde das Instrument Fig. 2 benutzt. Die Wellenlänge der Kreise war dieselbe. Das Instrument ist maximal für einen Strom von 2 Amp. bestimmt, als kleinster Ausschlag läßt sich 0,1 Amp. ablesen. Es gelang mit dem Instrument unter Verwendung der Schwebungsmethode, wobei kein besonderer Wert auf sehr nachgiebige Stromzuleitung zur beweglichen Platte des Kondensators am Zeiger des Instrumentes gelegt wurde, Ströme von 5 Milliamp. zu messen, also die 20fache Empfindlichkeit zu erreichen. Es muß natürlich der Hitzdraht gegen den Kondensator entsprechend elektrisch abgeschirmt werden, damit durch Anschaltung von Stromkreisen an den Hitzdraht die Betriebskapazität des Kondensators am Zeiger unbeeinflußt bleibt, da sonst die Messungen infolge Veränderung der Schwingungszahl in System 2 fehlerhaft werden. Eine weitere Steigerung der Empfindlichkeit läßt sich, ebenso wie bei Barrettern, durch Hilfsheizung des Hitzdrahtes erreichen. Bei Heizung mit 0,07 Amp. stieg die Empfindlichkeit bereits auf 2 Milliamp.

Ein selbstgefertigtes Hitzdrahtinstrument mit einmaliger Übertragung der Hitzdrahtverlängerung auf den Kondensator entsprechend Fig. 3 mit

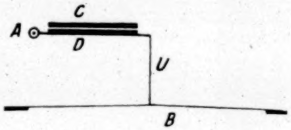


Fig. 3

Hitzdraht aus Bronzeband, 7,5 cm lang, 0,01 mm dick, 0,25 mm breit, Kondensatorplattengröße 3×3 cm mit 0,2 mm Plattenabstand ergab eine Empfindlichkeit von 3 Milliamp. Bei Verwendung von 10 Milliamp. Heizstrom stieg diese auf $5 \cdot 10^{-5}$ Amp. an, dabei war der beeinflußte Kondensator von 35 cm Kapazität dem Kondensator des Systems 2 mit $C = 600$ cm parallel geschaltet.

Ohne Zweifel lassen sich diese Empfindlichkeiten bei richtiger Wahl der Anordnung noch erheblich steigern. Man kann auch statt des Plattenkondensators eventuell einen Zylinderkondensator aus einem Rohr mit conachsial zu demselben gespannten Haardraht verwenden, der durch einen Rohrausschnitt hindurch mit dem Hitzdraht mechanisch gekoppelt ist und durch Herausbewegung aus seiner Mittellage Kapazitätsänderungen des Systems hervorruft. Es werden bei einer solchen Anordnung die bewegten Massen geringer, Drehpunkte und damit Reibungen vermieden. Eine solche Anordnung zeigte sich beispielsweise, zu anderen Messungen benutzt, dem Plattenkondensator überlegen.

Bei kleineren Wellenlängen im System 1 und 2, d. h. bei kleineren Kapazitäten steigt die Empfindlichkeit bedeutend, doch wird damit die Anordnung instabil und es ist schwer, die Wellenlänge und damit die Schwebungszahl konstant zu halten. Legt man die Resultate, die von anderer Seite[1]) mit vollkommeneren Einrichtungen beim Messen von Längenänderungen erhalten wurden, einer überschlägigen Rechnung zugrunde und vergleicht dieselben mit den bei Anordnung Fig. 1—3 gefundenen, so ergibt sich, daß sich die Empfindlichkeit der Methode

1) Whiddington a. a. O.

bei guter mechanischer Ausführung der Instrumente noch um 1—2 Zehnerpotenzen steigern lassen muß.

(Eingegangen 20. Dezember 1921.)

Über die Temperaturabhängigkeit der Pyroelektrizität.

Von M. Born.

Nach einem bekannten Gesetz von Grüneisen soll die thermische Ausdehnung wesentlich dieselbe Abhängigkeit von der Temperatur haben wie die Energie; letztere ist bei den tiefsten Temperaturen nach Debye der vierten Potenz der Temperatur proportional, also sollte, wenn das Grüneisensche Gesetz richtig ist, dasselbe für die thermische Ausdehnung gelten.

Die Durchführung der Gittertheorie[1]) hat aber ergeben, daß das Grüneisensche Gesetz nicht genau gilt, sondern nur ein Ausdruck für den qualitativ ähnlichen Abfall der Energie und der thermischen Ausdehnung mit sinkender Temperatur ist. Die in den strengen Formeln auftretenden Funktionen der Temperatur sind von verschiedenem Typus für die beiden Größen; insbesondere ist bei der tiefsten Temperatur die thermische Ausdehnung nicht T^4, sondern T^2 proportional, und dasselbe gilt für die Pyroelektrizität. Systematische Untersuchungen über die thermische Ausdehnung bei den tiefsten Temperaturen, wo dieses befremdliche T^2-Gesetz gelten sollte, scheinen nicht vorzuliegen.

Dagegen gibt es solche Messungen über Pyroelektrizität von W. Ackermann[2]), die sich bis zur Temperatur des flüssigen Wasserstoffs herunter erstrecken. Ich habe auf diese bereits in der zitierten Arbeit als qualitative Stütze der Theorie hingewiesen und erwähnt, daß S. Boguslawski[3]) schon 1914 eine quantentheoretische Formel mit Hilfe der Annahme einzelner, voneinander unabhängiger Resonatoren abgeleitet hat. Nun hat mich mein Freund Prof. Boguslawski in Moskau brieflich darauf aufmerksam gemacht, daß die Messungen Ackermanns stark für die Richtigkeit des T^2-Gesetzes sprechen und daß er schon 1914 in einer Abhandlung[4]), die mir entgangen war, darauf hingewiesen habe.

Boguslawskis Theorie der Pyroelektrizität, die ganz analog zu der elementaren Theorie der spezifischen Wärme nach Einstein auf der Annahme ungekoppelter Resonatoren aufgebaut ist, führt zu folgender Formel für das pyroelektrische Moment:

$$P = \frac{\text{konst.}}{e^{\frac{\Theta}{T}} - 1}, \qquad (1)$$

wo Θ eine für die Substanz charakteristische Temperatur ist. Beobachtet wird nicht P selbst, sondern

$$\gamma = -\frac{dP}{dT} = \gamma_\infty \frac{\frac{\Theta^2}{T^2} e^{\frac{\Theta}{T}}}{(e^{\frac{\Theta}{T}} - 1)^2}; \qquad (2)$$

dabei ist γ_∞ der Grenzwert, dem γ mit steigender Temperatur zustrebt.

Boguslawski zeigt nun, daß durch diese Formel (2) die Beobachtungen von Ackermann in einem weiten Temperaturbereich recht gut dargestellt werden. Nach oben hin reicht dieser Bereich bis etwa 500° abs., wo bei Turmalinkristallen, deren Pyroelektrizität bis 648° abs. verfolgt wurde, deutliche Abweichungen einsetzen, und zwar ein neuer Anstieg, der leicht erklärbar ist. Bei tiefen Temperaturen aber hört die Gültigkeit der Formel bei allen Kristallen auf, und zwar um so eher, je größer die charakteristische Temperatur Θ der Substanz ist.

Boguslawski findet, daß die Θ-Werte, die er zur Darstellung der Pyroelektrizität von Turmalinkristallen nach der Formel (2) braucht, mit den Werten, die er mit der Lindemannschen Formel aus dem Schmelzpunkt berechnet, recht gut übereinstimmen, und er schließt daraus, daß die zur Erklärung des pyroelektrischen Effekts von ihm eingeführten Schwingungen identisch sind mit denjenigen, die in der Theorie der spezifischen Wärme auftreten. Daher wird auch das Versagen der einfachen Theorie ungekoppelter Resonatoren auf dieselben Ursachen zurückzuführen sein, wie bei der spezifischen Wärme; da nun eine strenge Berechnung der Pyroelektrizität auf Grund der Gittertheorie damals noch nicht möglich war, versucht Boguslawski einfach, die Debyesche Formel für die spezifische Wärme zur Darstellung der pyroelektrischen Erregung heranzuziehen. Aber er kommt auch dabei zu keinem befriedigenden Resultat, weil der Abfall mit sinkender Temperatur nach der Formel von Debye immer noch zu schnell erfolgt; bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs würde das pyroelektrische Moment eines Lithiumselenat-Kristalls nach der Formel schon verschwindend klein sein, während es tatsächlich

1) M. Born, Zeitschr. f. Phys. **7**, 217, 1921.
2) W. Ackermann, Diss. Göttingen 1914. Ann. d. Phys. (4), **46**, 197, 1915.
3) S. Boguslawski, diese Zeitschr. **15**, 569, 1914.
4) S. Boguslawski, diese Zeitschr. **15**, 805, 1914.

noch etwa $^1/_{20}$ des Wertes bei Zimmertemperatur beträgt. Nun fährt Boguslawski fort:

„Ein genaues Gesetz für tiefe Temperaturen läßt sich aus Ackermanns Messungen nicht erschließen: dazu sind zu wenig Temperaturpunkte untersucht worden. Es läßt sich aber mit einiger Wahrscheinlichkeit behaupten, daß in diesem Bereich γ proportional der ersten Potenz der absoluten Temperatur ist".

Das ist aber genau das Resultat, zu dem die strenge Gittertheorie führt. Boguslawski hat auch bereits erkannt, daß in dem Beitrag einer einzelnen Eigenschwingung zum pyroelektrischen Moment

$$P_\nu = \varphi(\nu)\,\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

der Faktor

$$\varphi(\nu) = \frac{f}{\nu^2}$$

gewählt werden muß, damit bei tiefen Temperaturen P proportional T^2, also γ proportional T wird. Die Gittertheorie liefert diese Formel ganz von selbst[1]). Wir wollen jetzt die Resultate dieser exakten Rechnung noch einmal angeben[2]).

Ist E_0 die Energie, $\mathfrak{p}^*$ das (wahre) pyroelektrische Moment, K_i^* der Tensor der thermischen Spannungen, so gelten die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
E_0 &= U_0 + \frac{NkT}{V}\left\{\sum_{j=1}^{3} f_3\left(\frac{\Theta}{T}\right) + \sum_{j=4}^{3(p-1)} f_0\left(\frac{\Theta_j}{T}\right)\right\},\\
\mathfrak{p}^* &= -\frac{NkT}{V}\left\{3\sum_{j=1}^{3}\frac{\overline{\mathfrak{C}}^j}{(2\pi\nu_j)^2} f_1\left(\frac{\Theta_j}{T}\right) + \sum_{j=4}^{3(p-1)}\frac{\mathfrak{C}^j}{(2\pi\nu^0_j)^2} f_0\left(\frac{\Theta_j}{T}\right)\right\},\\
K_i^* &= \frac{NkT}{V}\left\{3\sum_{j=1}^{3}\frac{C_i^j}{(2\pi\nu_j)^2} f_1\left(\frac{\Theta_j}{T}\right) + \sum_{j=4}^{3(p-1)}\frac{C_i^j}{(2\pi\nu^0_j)^2} f_0\left(\frac{\Theta_j}{T}\right)\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Dabei sind f_0, f_1, f_3 folgende Funktionen:

$$\left.\begin{aligned}
f_0 &= \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{(Einstein)},\\
f_1 &= \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\xi\, d\xi}{e^\xi - 1} \quad \text{(Neuer Typ)},\\
f_3 &= \frac{3}{x^3}\int_0^x \frac{\xi^3\, d\xi}{e^\xi - 1} \quad \text{(Debye)}.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Ferner sind die Θ_j charakteristische Temperaturen, von denen sich $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ aus den Schallgeschwindigkeiten berechnen lassen, während die übrigen mit den ultraroten Eigenschwingungen ν_j des p-atomigen Gitters nach der Formel

$$\Theta_j = \frac{h\nu_j}{k}$$

zusammenhängen. Die $\mathfrak{C}^j$ und C_i^j sind konstante, zu den Eigenschwingungen gehörige Vektoren bzw. Tensoren. V ist das Volumen, N die Anzahl der Zellen des Kristallgitters.

Man sieht, daß neben der „Einsteinschen Funktion" f_0 in der Energie die „Debyesche Funktion" f_3, dagegen im pyroelektrischen Moment und im thermischen Spannungstensor eine neue Funktion f_1 auftritt. Diese ist aber für das Verhalten bei tiefen Temperaturen maßgebend; und zwar erhält man folgende Grenzformeln[3]):

$$T \text{ klein:}\quad \left|\begin{aligned}
E_0 &= U_0 + \frac{T^4}{V}\cdot\frac{\pi^4 N k^4}{5h^3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\nu_j^3},\\
\mathfrak{p}^* &= -\frac{T^2}{V}\frac{Nk^2}{8h}\sum_{j=1}^{3}\frac{\overline{\mathfrak{C}}^j}{\nu_j^3},\\
K_i^* &= \frac{T^2}{V}\frac{Nk^2}{8h}\sum_{j=1}^{3}\frac{\overline{C}_i^j}{\nu_j^3};
\end{aligned}\right. \quad (5)$$

1) Vgl. die Berechnung der Frequenzen des Gitters bei Berücksichtigung der kubischen Glieder der potentiellen Energie in meiner zitierten Arbeit (Zeitschr. f. Phys. 7, 217, 1921), insbesondere die Formeln (58), (59), (60), (62), (63).

2) Siehe Formel (143), (144) der oben zitierten Abhandlung.

3) Vgl. l. c. (149), (150); dort sind Fehler in den numerischen Faktoren.

$$T \text{ groß}: \quad \begin{cases} E_0 = U_0 + \frac{T}{V} 3 p N k, \\ \mathfrak{p}^* = -\frac{T}{V}\frac{Nk}{4\pi^2}\left(3\sum_{j=1}^{3}\frac{\mathfrak{E}^j}{\nu_j^2} + \sum_{j=4}^{3(p-1)}\frac{\mathfrak{E}^j}{\nu_j^{02}}\right), \\ K_i^* = \frac{T}{V}\frac{Nk}{4\pi^2}\left(3\sum_{j=1}^{3}\frac{C_i^j}{\nu_j^2} + \sum_{j=4}^{3(p-1)}\frac{C_i^j}{\nu_j^{02}}\right). \end{cases} \tag{6}$$

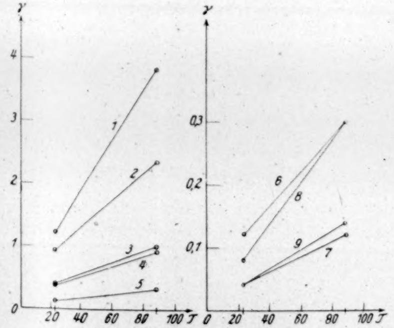
Wir bilden nun mit Boguslawski

$$\gamma = -\frac{d\mathfrak{p}^*}{dT} \tag{7}$$

und erhalten für tiefe Temperaturen:

$$T \text{ klein}: \quad \frac{\gamma}{\gamma_\infty} = T\frac{k\pi^2}{h}\frac{\sum_{j=1}^{3}\frac{\mathfrak{E}^j}{\nu_j^3}}{3\sum_{j=1}^{3}\frac{\mathfrak{E}^j}{\nu_j^2} + \sum_{j=4}^{3(p-1)}\frac{\mathfrak{E}^j}{\nu_j^{02}}} \tag{8}$$

Wie schon Boguslawski feststellt, reichen die Messungen Ackermanns zu einer genauen Prüfung der Proportionalität von γ mit T nicht aus, doch deuten sie stark darauf hin. Um das anschaulich zu machen, habe ich in der Figur die Messungen bei den beiden tiefsten



Kurve 1: Lithiumsulfat-Monohydrat,
„ 2: Lithiumseleniat-Monohydrat,
„ 3: Neutralweinsaures Kalium,
„ 4: Lithiumtrinatriumseleniat-Hexahydrat,
„ 5: Rechtsweinsaures Ammonium,
„ 6: Lithiumnatriumsulfat,
„ 7: Strontiumditartrat-Tetrahydrat,
„ 8: Rosaroter Turmalin,
„ 9: Blaugrüner Turmalin.

Temperaturen (flüssiger Wasserstoff 23° abs., flüssige Luft 88° abs.) aufgetragen und die beiden Punkte durch gerade Linien verbunden. Würde die Funktion $\gamma(T)$ stärker als konst. T abfallen, die Kurve also die T-Achse berühren, so müßten die geraden Verbindungslinien rechts vom Nullpunkte die T-Achse schneiden; das ist bei keiner einzigen der Fall. Sie weisen alle etwas links vom Nullpunkte hin; doch ist die Meßgenauigkeit bei 23° abs. schon so gering, daß man schwerlich auf eine gebrochene Potenz von T schließen wird. Das sieht man besonders an den Messungen der Turmalinpräparate[1]), die offenbar unter besonders günstigen Umständen erfolgt sind; hier zeigen die geradlinigen Verbindungsstrecken fast genau auf den Nullpunkt.

Ich glaube, daß man sich auf Grund dieser Figur ohne großen Vorbehalt Boguslawskis Ansicht anschließen kann, wonach die γ-Kurven geradlinig vom absoluten Nullpunkt auszulaufen scheinen. Doch wären neue Messungen bis herunter zur Temperatur des flüssigen Heliums sehr zu begrüßen.

Als rohe Näherung kann man die Annahme machen, daß alle vorkommenden Schwingungszahlen ν_j gleich groß sind; dafür spricht, daß Boguslawski den Verlauf von γ in weitem Umfange durch eine einzige Einsteinsche Funktion darstellen konnte. Dann kann man schreiben

$$\frac{\gamma}{\gamma_\infty} = \frac{T}{\Theta}\frac{\pi^2}{3+C}, \tag{9}$$

wo

1) Im ganzen sind 6 Turmalinpräparate untersucht worden; ich habe zwei beliebige herausgegriffen, bei denen sich die γ-Werte stark unterscheiden.

$$C = \frac{\sum\limits_{j=4}^{3(p-1)} \mathfrak{E}_j}{\sum\limits_{j=1}^{3} \overline{\mathfrak{E}}_j} \tag{10}$$

gesetzt ist. Boguslawski, der nur mit einer einzigen Funktion vom Typus f_1 rechnet, also nur die „elastischen“ Wellen, nicht die ultraroten Eigenschwingungen berücksichtigt, hat $C = 0$ und erwartet demnach, daß die Größe

$$\frac{\gamma}{\gamma_\pi} \cdot \frac{\Theta}{T} \tag{11}$$

eine numerische Konstante sein soll. In der Tat ist das auch ganz grob der Fall[1]); die Werte weichen vom Mittel nach oben und unten im Höchstfall um etwa 30 Proz. ab.

1) Vgl. die Tabelle VII, S. 809, der zitierten Boguslawskischen Arbeit.

In Wirklichkeit werden aber die ultraroten Eigenschwingungen immer Beiträge zum pyroelektrischen Momente liefern; C wird nicht Null sein. Daher werden individuelle Schwankungen der Größe (11) vorkommen.

Da sich aber ohne genaues Studium der Gitterschwingungen des betreffenden Kristalls über den Wert von C nichts sagen läßt, wollen wir auf die von Boguslawski diskutierte Frage nach dem absoluten Betrage der Größe (11) nicht eingehen.

Wenn man die Ackermannschen Messungen als Bestätigung des T^2-Gesetzes für das pyroelektrische Moment ansieht, so kann man wohl nicht zweifeln, daß dasselbe Gesetz auch für die thermische Ausdehnung gelten muß; denn beide Vorgänge beruhen auf demselben Mechanismus. Neue Messungen wären aber jedenfalls sehr erwünscht.

Göttingen, Januar 1922.

(Eingegangen 3. Januar 1922.)

BESPRECHUNGEN.

H. G. Bader, Grundlagen der Flugtechnik, Entwerfen und Berechnen von Flugzeugen. kl. 8°. VIII u. 194 S. Mit 47 Abbildungen. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1920. M. 18.—, geb. M. 22.— + 100% Teuerungszuschlag.

Das Buch bezweckt, dem Flugzeugkonstrukteur die Unterlagen für die Berechnung der Flugzeuge (ausschließlich der statischen Berechnung) zu bieten und den zweckmäßigen Gang dieser Berechnung auseinander zu setzen. Obwohl das Buch demnach in erster Linie die technischen Dinge berücksichtigt, dürfte sein Inhalt doch auch vom allgemeinen physikalischen Standpunkte aus von Interesse sein, da gerade die Vorgänge beim Fluge besonders weitgehend theoretisch geklärt sind, und da infolgedessen die physikalischen Grundlagen einen verhältnismäßig breiten Raum einnehmen. Der Verfasser bringt zunächst die Berechnung der aerodynamischen Größen Auftrieb und Widerstand und was damit zusammenhängt: Flügeltiefe und Anstellwinkel sowie Flugleistung. Weiterhin folgen sehr ausführliche Untersuchungen über die Stabilität und die damit zusammenhängenden Dinge: Höhensteuer und Schwerpunktlage, Längs- und Querbewegung der Flugzeuge und zuletzt eine kurze Darstellung der Vorgänge beim Anlauf und bei der Landung. Im Anschluß hieran wird ein praktisches Musterbeispiel durchgerechnet. Den Schluß bildet eine ausführliche Zusammenfassung, in der in dankenswerter Weise die Gedankengänge in gemeinverständlicher Form nochmals übersichtlich wiedergegeben werden. Diese Zusammenfassung wird besonders dem nicht direkt fachlich interessierten Lehrer sehr willkommen sein, zumal da die vorausgehende Darstellung wegen allzu reichlicher Anwendung der Formelsprache ein sehr eingehendes Studium erfordert. Betz.

Berichtigungen.

Berichtigung zum Vortrag von H. Dingler: „Die Rolle der Konvention in der Physik“. Auf S. 51, rechte Spalte, Zeile 8 von oben, hat sich ein sinnstörender Druckfehler eingeschlichen. Es muß dort richtig heißen: „zwar vermeintlich, nicht aber in voller Wirklichkeit usw., statt „zwar vermeintlich nicht, aber in voller Wirklichkeit“ usw.

Berichtigung zum Aufsatz Fr. Ahlborn: „Turbulenz und Geschwindigkeitsverteilung in Flußläufen“, diese Zeitschr. **23**, 57, 1922, S. 58, 1. Spalte, Anmerkung 1 lies richtig Zeitschr. f. Mathematik und Physik und 2. Spalte, Thomson statt Thomsen.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Braunschweig Dr. Hans Lindemann für Chemie.

Ernannt: Der Privatdozent für Astronomie an der Universität Berlin Dr. Arnold Kohlschütter zum Hauptobservator am Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam, der technische Direktor der Fabrik für Eichenholzextrakt in Mitrovitz Dr. techn. Joh. Jedlicka zum ord. Professor der chemischen Technologie des Holzes an der Tschechischen Technischen Hochschule in Prag.

Verliehen: Den Privatdozenten für Chemie an der Universität Göttingen Dr. Heinrich Wienhaus und Dr. Robert Wintgen und dem Privatdozenten der Chemie an der Technischen Hochschule Breslau Dr. Ernst Koenigs die Dienstbezeichnung a.o. Professor.

Gestorben: Der Direktor des Observatoriums in Greenwich Sir William Christie, der emer. ord. Professor der Experimentalphysik an der Tschechischen Universität Prag Dr. Cenek Scrouhal.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Erich Hückel in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

MAY 3 1922

Physikalische Zeitschrift

Begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

Herausgeber:
Professor Dr. **M. Born** und
Professor Dr. **P. Debye**

Schriftleiter:
Dr. **Erich Hückel** in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von jährlich 150 Mark, bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband 210 Mark, im Ausland je nach dem Valutastande. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 3.— Mk., Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten entweder an die Herausgeber: Professor Dr. M. Born, Göttingen, Planckstraße 21, und Professor Dr. P. Debye, Zürich, Physikgebäude, Gloriastr. 35 oder an die Schriftleitung: Dr. Erich Hückel, Göttingen, Bunsenstraße 9, Physikalisches Institut der Universität, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

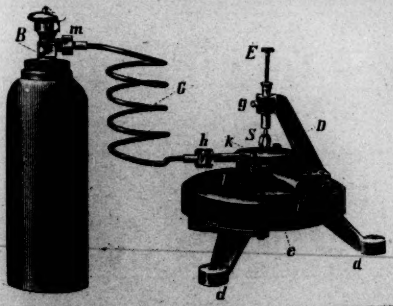
Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig, Königstraße 2.

No. 6. 15. März 1922. No. 610. **23. Jahrgang.**

Phys.-mech. Institut von

Prof. Dr. M. Th. Edelmann & Sohn,

München.



Rotierender Spiegel.

Katalog 30 erschienen und ebenso wie Speziallliste No. 29 über Saitengalvanometer und Registrierapparate, Spezialliste No. 31 über einfache Präzisionsschulapparate gratis und franko.

Mit einer Beilage von S. Hirzel in Leipzig, betreffend:
Physikalischer Prospekt.

Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechungen.)

	Seite
Atomistik: Grundriß der neueren —, v. B. Bavink. (B.)	143
Bavink, B., Grundriß der neueren Atomistik. (B.)	143
Brion, G., Luftsalpeter. (B.)	143
Düsing, K., Lehrbuch der Experimentalphysik. (B.)	142
Elemente: Die Genesis der —, v. M. C. Neuburger	133
Experimentalphysik: Lehrbuch der —, v. K. Düsing. (B.)	142
Genesis: Die — der Elemente, v. M. C. Neuburger	133
Goetz, A., Untersuchungen über den Zerstäubungsvorgang glühender Wolframdrähte	136
Hahn, K., Grundriß der Physik. (B.)	143
Hay, A., Sehen und Messen. (B.)	143
Hydrodynamische Gleichungen: Über mehrdeutige Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen, v. G. Jaffé	129
Integration: Graphische —, v. F. A. Willers. (B.)	142
Jaffé, G., Über mehrdeutige Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen	129
Laue, M. v., Über die Auffindung der Röntgenstrahlinterferenzen. (B.)	144
Luftsalpeter, v. G. Brion. (B.)	143
Messen und Sehen, v. A. Hay. (B.)	143
Metallographie: Lehrbuch der —, v. G. Tammann. (B.)	144
Neuburger, M. C., Die Genesis der Elemente	133
Physik: Lehrbuch der —, v. H. Schumann. (B.)	142
— Grundriß der —, v. K. Hahn. (B.)	143
Röntgenstrahlinterferenzen: Über die Auffindung der —, v. M. v. Laue. (B.)	144
Schumann, H., Lehrbuch der Physik. (B.)	142
Sehen und Messen, v. A. Hay. (B.)	143
Tammann, G., Lehrbuch der Metallographie. (B.)	144
Willers, F. A., Graphische Integration. (B.)	142
Wolframdrähte: Untersuchungen über den Zerstäubungsvorgang glühender Wolframdrähte, v. A. Goetz	136
Zerstäubungsvorgang: Untersuchungen über den — glühender Wolframdrähte, v. A. Goetz	136

PHYSIKER

praktisch veranlagt, mit besonderen Kenntnissen auf dem Gebiete der **Elektrizitätslehre** für unsere Patentabteilung gesucht.

Schriftl. Angebote mit Zeugnisabschriften, Lebenslauf, Lichtbild und Gehaltsansprüchen erbeten unter dem Kennwort „**Physiker**“ an die Angestellten-Vermittlungsstelle bei den Direktionen der

SIEMENSFIRMEN

Verwaltungsgebäude SIEMENSSTADT bei BERLIN

Neukonstruktionen

geodätischer und sonstiger wissenschaftlicher Instrumente und Apparate übernimmt unter vollster Wahrung des geistigen Eigentumsrechtes des Auftraggebers die

Konstruktions- und Versuchswerkstättenabteilung der
INDUSTRIE-NEULAND Aktiengesellschaft
Dachauerstr. 13 MÜNCHEN Tel. 50784

Neuste Konstruktion!

Kugelepiskop. D.R.P. 250311.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.